

Gödel Kanıtlaması

ERNEST NAGEL · JAMES R. NEWMAN

BOĞAZİÇİ ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Gödel Kanıtlaması ERNEST NAGEL · JAMES R. NEWMAN



GÖDEL KANITLAMASI

Bülent Gözkân 1957'de İstanbul'da doğdu. Orta öğrenimini Saint Joseph'te, lisans eğitimini ODTÜ İnşaat Mühendisliği Bölümü'nde tamamladı. 1992'de ODTÜ Felsefe Bölümü'nden Geometride Uzlaşımsalcılık üzerine yazdığı teziyle yüksek lisans, 2000'de Boğaziçi Üniversitesi Felsefe Bölümü'nden Kant'ta Ben'in ve aklın kuruluşu üzerine yazdığı teziyle doktora derecesi aldı. Halen Yeditepe Üniversitesi Felsefe Bölümü'nde öğretim üyesidir. ***Makaleleri***: 1) "Bilgi, Bilinç ve Yapay Zekâ," *Bilgisayar ve Beyin*, Nar Yayınları, 1997. 2) "Kant'ın Metafizik ve Akıl Eleştirisi Üzerine Bir Eleştiri," *Yeditepe'de Felsefe I*, Yeditepe Ünv. Yay., 2002: s. 21-79. 3) "Kant ve Üniversite İdeası," *Cogito* Kant Özel Sayısı, YKY, (Mart 2005). 4) "Kant'ın Eleştiri-Öncesi Döneminden Eleştirel Dönemine Geçişdeki Anahtar Yazı: Uzayda Yönler Arasındaki Farklılığın Nihai Dayanağı Hakkında," *Felsefe Tartışmaları* 37, Boğaziçi Üniversitesi Yay., 2006. ***Çevirileri***: *Matematik Tarihi*, Marcel Boll, İletişim Yay. 1991 (3. Baskı, 2003); *Karl Popper*, Jean Baudouin, İletişim Yay. 1993 (2. Baskı 2003); *Akılcılık*, John Cottingham, Sarmal Yay. 1996 (2. Baskı, Doruk Yay. 2003); *Descartes Sözlüğü*, John Cottingham, Sarmal Yay. 1996 (A. Kovanlıkaya, A. Çitil ve N. Ilgıcıoğlu ile birlikte) (2. Baskı, Doruk yay. 2002); *Estetiğin İdeolojisi*, Terry Eagleton, Özne Yay, 1998 (Editör olarak) (2. Baskı, Doruk yay., 2002); *Aritmetiğin Temelleri*, Gottlob Frege, (YKY, 2008).

GÖDEL KANITLAMASI

Ernest Nagel
James R. Newman

Önsöz: Douglas R. Hofstadter

Sunuş ve Çeviri: Bülent Gözkân



BOĞAZİÇİ
ÜNİVERSİTESİ
YAYINEVİ

Ernest Nagel & James R. Newman
Gödel's Proof

Gödel Kanıtlaması

Boğaziçi Üniversitesi Uçaksavar Kampüsü
Cengiz Topel Caddesi, Garanti Kültür Merkezi, Arka Giriş
Etiler/İstanbul

bupress@boun.edu.tr
www.bupress.org, www.bupress.net
Telefon ve faks: (90) 212 257 87 27
Sertifika No: 10821

Yayıma Hazırlayan: Ergun Kocabıyık
Kapak tasarımı: Nazlı Ongan

Kapak Resmi: Escher, "Resim Galerisi", 1956.
Baskı: G.M. Matbaacılık ve Ticaret A.Ş.,
100 Yıl Mah. MAS-SİT, 1. Cadde, No: 88, Bağcılar/İstanbul
Telefon: 0212 6290024-25
Sertifika No: 12358

Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi'nden
Birinci Basım: 2008
İkinci Basım: 2008
Üçüncü Basım: Ağustos 2010

Boğaziçi University Library Cataloging-in-Publication Data
Nagel, Ernest 1901-
Gödel Kanıtlaması. / Ernest Nagel and James Newman.
106 p.; 21 cm.
ISBN 978-975-6193-70-9
1. Gödel's theorem. I. Title. II. Newman, James Roy, 1907-1966.
QA9

Bertrand Russell'a

İçindekiler

SUNUŞ

> Matematiğin giderek daha çok kesinlik yönünde ilerlemesi, bilindiği gibi, matematiğin büyük bir kısmının biçimselleştirilmesiyle öne çıkmıştır; öyle ki, kanıtlamalar az sayıda mekanik kuralla yapılabilir. Şimdiye kadar kurulan en kapsamlı biçimsel dizgeler, bir yanda *Principia Mathematica*, diğer yanda da Zermelo-Fraenkel'in kümeler kuramı için geliştirdiği (daha sonra J. V. Neumann tarafından genişletilen) aksiyomatik dizgedir. Bu dizgeler öylesine kapsamlıdır ki, bugün matematikte kullanılan tüm kanıtlama yöntemleri onlar tarafından biçimselleştirilmiştir; yani az sayıda aksiyoma ve çıkarım kuralına indirgenmiştir. Dolayısıyla, bu aksiyomların ve çıkarım kurallarının söz konusu dizgelerde biçimsel olarak ifade edilebilecek her matematiksel soruya karar verebilmeye yeterli olacakları düşünülmüştür. Aşağıda bunun geçerli olmadığı gösterilmiştir; yani sözü edilen her iki dizgede de tam sayılar kuramı içinde aksiyomlardan kalkılarak karar verilemeyecek oldukça basit önermeler vardır.[1]

Gödel 1931'de yayımlanan ünlü makalesinin başında bunları söylüyor. Gödel'in bu makalesi, matematik tarihi içindeki önemli olaylardan birisidir. Çünkü bu çalışma yalnızca matematiğin içindeki sınırlılıkları göstermekle kalmamış, var olan yapı içinde matematik üzerine düşünülenlere de bir sınır getirmiştir. Örneğin var olan aksiyomatik yapı içinde matematiğin mantığa indirgenip indirgenemeyeceği sorusuna da ışık tutmuştur. Ayrıca moderniteyi belirleyen Akıl anlayışına bir "hiza" gösteren çalışma olarak da değerlendirilmiştir Gödel'in

---

[1] Kurt Gödel, *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems*, çev. B. Meltzer, Basic Books, New York, 1962, s. 37. [Türkçe baskısı için bkz. *Principia Mathematica ve İlişkili Dizgelerin Biçimsel Olarak Kararlaştırılamayan Önermeleri Üzerine I*, çev. Özge Ekin, Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi, 2010 —*ed. notu.*]

kanıtlaması. Bütünlük ve tamlık beklentilerinin sınırlarını göstermiş olduğu düşünüldüğünden, modernite ve postmodernite tartışmaları üzerine düşünce üreten felsefecilerin değerlendirmelerinde Gödel'in kanıtlaması da yerini almıştır.

Gödel, doğal sayılar aritmetiğini kapsayan bir biçimsel dizgede karar verilemeyen önermeler olduğunu kanıtlamıştır; yani bu önermeler ne kanıtlanabilirler, ne de bunların biçimsel değillemeleri kanıtlanabilir. Ama öte yandan, bu karar verilemeyen önermelerin doğru oldukları üst-matematiksel usavurmalarla gösterilebilir. Ayrıca Gödel, doğal sayılar aritmetiğini kapsayan bir biçimsel dizgenin tutarlılığının, bu dizgenin içinde kanıtlanamayacağını da kanıtlamıştır. Gödel'in çalışmalarının sonuçları matematiğin kendi içsel sınırlılıkları olduğunu da ortaya koymuştur.

Bu sonuçların neden bu denli önemli olduklarını vurgulayabilmek için bu çalışmanın tarihsel arka düzlemine, matematiğin nasıl bir bilgi türü olarak anlaşıldığına ve felsefi bakışını nasıl etkilediğine kısaca bakmak gerekiyor.

İnsanların çağlar boyunca matematiği diğer tüm insan etkinliklerinden ayırmasının altında, matematikte büyük ölçüde bir dizgeselliğin ve kesinliğin egemen olması yatmaktadır. Matematiksel bilgiler büyük bir düzen içinde dizgeselleştirilebilirler ve bunların doğrulukları, saptanan sağlam kurallarca tam ve kesin olarak kanıtlanabilir. Her ne kadar matematiğin içinde henüz çözülmemiş çok sayıda problem olsa da (örneğin her çift sayının iki asal sayının toplamı olduğunu söyleyen Goldbach oranlamasının henüz kanıtlanmamış olması gibi veya asal sayıların türetiminin genel denkleminin bulunamamış olması gibi), bu problemlerin bir gün çözüme kavuşturulacağı matematiğe genel bakışın içinde bulunmaktadır.

Matematiğin dizgesel olarak kurulabileceği fikri Eski Yunan'dan beri bilinmektedir. XIX. yüzyılın ikinci yarısı ile XX. yüzyılın başı matematiğin tam olarak, her türlü sezgiden arındırılarak dizgeselleştirilmesi çabalarına tanık olmuştur. Matematiğin dizgeselleşmesi, yani matematiğin aksiyomatikleştirilmesi demek, matematik dizgenin temelini oluşturacak önermelerin, yani aksiyomların belirlenmesi ve bu

aksiyomlardan kalkarak kanıtlanacak önermeler için (yani teoremler) hangi Dönüşüm ve Oluşum kurallarının kullanılacağının saptanması demektir. Bazı aksiyomların nasıl ve niye seçildiği ise ilginç felsefi sorunlardan birisidir.

Aksiyomatik yöntemin babası Eukleides'tir (İÖ 300). Eukleides kendinden önce bilinen birçok geometri teoremini de kendi kurduğu geometri dizgesinden mantıksal olarak çıkarımlayacak bir aksiyom dizgesi kurmuştu. Bu dizge sayesinde başlangıçta kabul edilen az sayıda aksiyomla, mantık ve dönüşüm kuralları kullanılarak dizgenin diğer önermelerini kanıtlama olanağı vardır. Bu önermeler mantıksal olarak kanıtlanmakla birlikte, gözlemlerle de uyumlu görünüyorlardı. Yani Eukleides geometrisinin içinde gözlemle yanlışlanabilecek hiçbir önerme yoktu. Bu da, kabul edilen aksiyomların aslında dünya hakkında apaçık ve kesin bilgi sağlayan doğru önermeler olduğu görüşünü getirdi.

Bu yaklaşım epistemoloji açısından büyük felsefi öneme sahip. Akılcılık bu yaklaşımda büyük bir destek buluyordu. XVIII. yüzyıla kadar Akılcılık yanlısı filozoflar, geometri örneğini insan aklının evren hakkında kesin bilgiler edinebildiğinin ya da böyle bilgilere (*a priori*) doğuştan sahip olduklarının bir kanıtı olarak öne sürdüler. Deneyci filozoflar için ise geometri, tüm bilgimizin deneyimden geldiğinin öne sürülmesinde açıklanması zor bir karşı örnek olarak duruyordu.

Kant'la birlikte geometri bilgisinin *a priori* ve kesin olması, doğayla karşı karşıya gelen insan aklının kendi kavramlarını inşa ederek geometriyi kurması olarak açıklandı. Böylece geometrinin ilkeleri ne evren hakkında kesin bilgilerdir, ne de deneysel genellemelerdir; insan aklının doğanın bilgisini edinebilmesini sağlayan kendi biçimsel yapısının bir inşasıdır geometri. Kesinliği bize bağlı olmasından gelir; doğruluğu ise deneyimin zorunlu biçimi olmasından gelir.

XIX. yüzyılın başında Eukleides-dışı geometrilerin ortaya çıkması matematik tarihinde olduğu kadar, düşünme tarihinde de bir dönüm noktasını oluşturdu. Çünkü zorunlu doğru oldukları düşünülen Eukleides geometrisinin aksiyomlarından birinin yerine (Eukleides'in beşinci aksiyomu) onun tam karşıtı olan bir aksiyomun konulmasıyla ortaya yeni

geometri dizgeleri çıkıyordu. Yani Eukleides'in, "bir doğruya onun dışındaki bir noktadan bir ve yalnız bir paralel doğru çizilebilir" olduğunu ifade eden 5. aksiyomun yerine, bu aksiyomun tam karşıtını ifade eden, yani bir doğruya onun dışındaki bir noktadan birden çok paralel çizilebileceğini, ya da hiç paralel çizilemeyeceğini kendi aksiyom dizgelerine dahil eden Eukleides-dışı geometriler, önermeleri alışılmış sezgilere aykırı gelse de, matematik açıdan Eukleides geometrisi ile eşdeğerdi, yani biçimsel olarak kanıtlanabilirlerdi. Daha sonraları, bunlar sezgiye aykırı görünseler de, Newtoncu olmayan fizikte olgularla uyumlu olarak kullanılabildiklerine tanık olundu; Einstein'ın Genel Görecelik Kuramı (1915), Eukleides-dışı Riemann geometrisiyle ifade edilmiştir. Bu ilerlemede en dikkat çekici nokta, bir dizgede doğru olan bazı önermelerin diğer dizgede yanlış olabilmesiydi. Eukleides-dışı geometrilerin tarihi ve başlattığı tartışma burada ele alınamayacak kadar geniş, ama burada dikkat edilmesi gereken nokta, bu geometrilerin kabul görmesiyle birlikte, matematikte kendinden doğruluk fikrinin yerine, matematikte tutarlılık ve kanıtlanabilirlik fikrinin geçmesidir. (Elbette bu geçiş derhal olmuyor; Eukleides-dışı geometrilerin ortaya çıkmalarıyla kabul görmeleri arasında yaklaşık 50 yıl vardır.) Eukleides-dışı geometrilerin ortaya çıkması hem bilgi felsefelerini alt üst etmiştir, hem de matematikte asıl önemin içerikten önce biçime verilmesi gerektiğini öne çıkarmıştır. Nitekim Eukleides-dışı geometrilerden sonra, kusursuz bir biçimselliğin sağlanması arı matematiğin en önemli konusu oluyor ve aksiyomların içerik olarak doğru olma fikri, yerini, biçimsel olarak tutarlılık fikrine bırakıyor.

Matematikte asıl önemin içerikten önce biçime verilmesi gerektiği fikrinin, XIX. yüzyılın sonlarına doğru tüm sanatsal ifade biçimlerindeki soyuta ve biçime yönelmeyle de ilişkilendirilebileceğini sanıyorum. Matematikte biçime verilen önemle, "matematik için matematik" yapmakla, "sanat için sanat" yaklaşımı arasında bir koşutluk kurulabilir. 1870'lerden sonra şiirde, plastik sanatlarda ve müzikte ortaya çıkan içerikten önce biçime yönelen soyut ifade biçimleriyle, matematikte ve bilimsel yaklaşımda öne çıkan anlayış değişikliği

bir bütün olarak değerlendirilebilir sanıyorum.

Matematiğin içerik olarak olgusal doğruluklara sahip olduğu fikri, birbirleriyle tam çelişik geometri dizgelerinin eşdeğer biçimsel meşruluğa sahip olmalarının anlaşılmasıyla sarsılmıştır. Böylece matematiğin aksiyomatikleştirilmiş tek dalı geometrinin doğruluğuna olan inancın sarsılması, sağlam temellerin bulunması konusunda matematikçilerin dikkatlerini geometriden aritmetiğe çevirdi. Weierstrass'ın, Dedekind'in çalışmaları bu yöndedir. Cantor'un inşa ettiği kümeler kuramında ise geometrik sezgiye hiç gereksinim yoktur. İtalyan Matematikçi Peano ise tam sayılar aritmetiğini aksiyomatikleştirmiştir. (Bkz. *Ek Notlar 1*)

Matematikte ve mantıkta büyük bir hamleye neden olan biçimselleştirme ve simgeleştirme felsefeye de önemli bir etki yapıyor. Felsefeyi metafizik baskıdan kurtarma yönündeki büyük bir girişim olarak da tanımlanabilecek Mantıkçı Pozitivizm, metafizikten kurtulma programında en önemli yeri mantığa veriyor. Böylece sağlam bir mantıksal yapıya oturtularak arılaştırılan felsefe dili, içinde gizlenmiş olan dilsel sorunlardan, Mantıkçı Pozitivistlerin deyişiyle "sözde sorunlardan", yani metafizik sorunlardan da arıtılmış olacaktı. Galileo'yla başlayan ve özellikle Newton'da doruğuna ulaşan doğanın matematikselleştirilmesi çabasına benzer şekilde, Mantıkçı Pozitivistler felsefenin de simgesel mantığı bir araç olarak kullanarak hem felsefenin kendi iç sorunlarını çözmesini, hem de diğer alanların felsefeleri için bir model oluşturmayı hedefliyorlardı. Böylece Kant'ın, aklın sınırlarını belirleyerek metafiziğin zeminini belirlemesi gibi, Mantıkçı Pozitivistler de simgesel mantıkla felsefenin sınırlarını belirlemeyi amaçlıyorlardı. Bu ideolojik arka planla simgesel mantığın ve biçimselleştirmenin kazandığı büyük önem anlaşılıyor.

Frege'nin 1879'da yayımlanan *Begriffsschrift*'iyle yeni bir döneme giren matematik felsefesi, bir yanda aritmetiğin tümüyle mantığa indirgenebileceğini savlayan Fregeci görüşle (*Aritmetiğin Temelleri*, 1884) ve Russell ve Whitehead'in bu ana fikir çerçevesinde gerçekleştirdikleri anıtsal *Principia Mathematica* ile; öte yanda da matematiğin mutlak bir bi-

çimselleştirilmesini sağlamayı amaçlayan Biçimci (Formalist) Okulun, aritmetiğin biçimsel tutarlılığını sağlama çalışmalarıyla daha önce görülmemiş dev adımlar atıyordu. Peano aritmetiği, Hilbert geometriyi biçimselleştiriyordu. (Eukleides'in geometrisi de biçimsel aksiyomatik bir yapıydı; ancak bu geometri biçimsel olarak kusursuz değildi, yani kanıtlamalar saf mantıksal olarak yalnızca aksiyomlara ve tanımlara dayanarak değil, aksiyom ve tanımlarda içerilmeyen sezgisel öğeleri de devreye sokarak yapılabiliyordu. Hilbert'in 1899'da yayımlanan *Grundlagen der Geometrie* ile geometriyi saf mantıksal olarak inşa ediyor). Biçimselleştirmenin iki önemli sonucu var: 1) Matematiği içeriğe bağımlı bir bilim olmaktan çıkarıp saf biçimsel bir bilim haline getiriyor; 2) yetkin, tam bir biçimsel yapı Dönüşüm, Oluşum ve Çıkarım kurallarıyla ondan çıkarımlanabilecek her türlü önermeyi (teoremi) kapsıyor. Yani analitik bir yapı kurulmuş oluyor ve böyle sağlam bir yapıdan beklenen, dizgenin kanıtlanabilecek her doğru önermesinin kanıtlanmasıdır. Böylece aksiyomatik dizgelere dönüşen matematiğin bu iki dalı için matematikçiler, matematiğin tümünün daha geniş ölçekli bir aksiyomatikleştirilmesine girişilmeden önce bu dizgelerin iç tutarlılıklarının kesin olarak sağlanması gerektiğini düşünüyorlardı. Aritmetiğin tutarlılığının sağlanması 1920'lerde Hilbert'in ve onun çevresindeki matematikçilerin (Von Neumann, J. Herbrand) ana ilgi odağını oluşturuyordu. İşte tam bu dönemde yayımlanan Gödel'in sözü edilen makalesi tüm bu çalışmaların sınırlarını belirlemiştir. Dolayısıyla Gödel'in kanıtlamasının tam da 1920'lerde yoğunlaşan tartışmalar ve çalışmalar sırasında ortaya çıkması herhalde rastlantı değil; ve ancak bu tür son derece önemli, temel ve uç çalışmaların ancak yoğun bir kültür ve tartışma ortamının içinden çıkabilmesine iyi bir örnek oluşturuyor. Özellikle Gödel'in makalesini yayımladığı dönemde Viyana yalnız Mantıkçı Pozitivistlerle, Wittgenstein'la, Popper'le felsefede değil, aynı zamanda Schönberg, Berg ve Webern'le müzikte, Adolf Loss'la mimaride, hatta Nimzovitzch'le, Reti'yle satrançta da yeni atılımların, yeni kuramların bir merkeziydi.

Ama bu biçimselleştirme çabalarının felsefi arka pla-

nından gelen ideolojik desteğin yanında, bu dizgelerin kendi iç sorunlarının da kesin çözüme bağlanması gerekiyordu. 1920'ler, biçimsel dizgelerin iç sorunlarının çözümü konusunda önemli adımların atıldığı yıllardır.

Bir biçimsel aksiyomatik dizgenin en önemli sorunu tutarlılık sorunudur; yani bir biçimsel dizgenin aksiyomlarından, türetim ve dönüşüm kurallarından bir önermenin hem kendisinin, hem de onun biçimsel değillemesinin çıkarımlanmaması gerekir. İşte biçimsel dizge üzerinde yoğunlaşan ve Hilbert'in öncülüğündeki Biçimci Okulun 1920'lerdeki en büyük çabası aritmetiğin tutarlı olduğunu göstermektir. Presburger 1930'da çarpımı kullanmayan, yalnızca toplamayı kullanan bir aritmetiksel dizgenin önermeleri için bir karar verme yöntemi yayımladı. Buna göre toplama işlemi ile sınırlandırılmış bir tamsayılar dizgesinde, dizgenin her önermesine karar verilebilir; yani dizge içinde ya kanıtlanır ya da kanıtlanmaz.

Gödel'in makalesi aritmetiğin tutarlılığının sağlanmaya çalışıldığı bir döneme rastlamıştır ve ortaya koyduğu sonuçlarla Hilbert'in programının ulaşılamaz olduğunu göstermiştir; yani doğal sayılar aritmetiğini (toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte) kapsayan bir biçimsel dizgenin tüm önermeleri, Hilbert'in beklentisinin aksine, kanıtlanamaz; dizgenin içinde karar verilemeyen önermeler her zaman olacaktır. Ayrıca, doğal sayılar aritmetiğini kapsayan bir biçimsel dizgenin tutarlılığının, bu dizgenin içinde kanıtlanamayacağı da kanıtlanmıştır. Burada Gödel'in kanıtlaması üzerine daha fazlasını söylemeye gerek yok; çünkü Nagel ve Newman'ın kitabı Gödel'in çalışmasını uzman olmayan okuyucuya yeterince anlaşılır biçimde ulaştırıyor. Aslında Gödel'in özgün makalesinin yerine bu kitabın çevrilme nedenini de, bu anlaşılırlık oluşturuyor (kendim için de); çünkü Gödel'in özgün makalesini, hakkını vererek tüm ayrıntılarıyla izleyebilmek, mesleki uzmanlığa sahip kişilerin bir kısmı için olanaklı ancak.

Eukleides-dışı geometriler, matematik alanında yapılan çalışmalar olmakla birlikte, dünyayı kavrayışın, dünyanın bilgisini değerlendirişin her alanına derin etki yapmıştı. Gödel'in matematik içinde kalan çalışmalarının da, kendi

alanı dışında önemli göndermeleri vardır. Aristoteles'ten beri bilinen, ilk ilkelerden yola çıkarak sağlam bir tümdengelimli dizge kurma idealini sarsmıştır. Bundan başka Mantıkçı pozitivizmin en önemli aracının sınırlarını gündeme getirmiştir; bu sonuç kuramsal fiziğin tam olarak aksiyomatikleştirilmesini sınırlıyordu. Dolayısıyla yetkin bilimsel dizge ideali, bu idealin kendi epistemolojik sorunlarının yanında (tümel önermeler biçiminde ifade edilen doğa yasalarının doğrulanma sorunları gibi), biçimsel bakımdan da darbe yemiş oluyordu. Böylece Gödel'in çalışması 1960'larda gündemi belirlemeye başlayan ABD kökenli yeni bilim felsefesine (Kuhn, Feyerabend) giden yolda dayanaklardan biri oluyor. Ayrıca postmodernite üzerine düşünce üreten felsefeciler Gödel'e sık sık gönderme yapıyorlar ve bütünselci yaklaşımlara yöneltilen eleştirilerde Gödel'in çalışmalarından da destek bulduklarını düşünüyorlar.

Son olarak, Gödel'in çalışması görselleştirilebilir mi? Böyle bir girişimi Douglas R. Hofstadter çok ilginç kitabı *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*'te deniyor.[2] Elinizdeki kitabın kapak resmi olarak kullanılan Escher'in "Resim Galerisi" adlı resminden yola çıkan Hofstadter, bu resmin çözümlenmesiyle Gödel kanıtlaması arasında ilginç benzeşimler kuruyor. Gödel'in kanıtlamasından çıkan, "kendine gönderme yapması inşa edilen bir dizgenin içinde karar verilemeyen önermeler vardır, dolayısıyla dizge tam olamaz" sonucu, Escher'in resmi için de geçerli. Resim kendine gönderme yapmaktadır, çünkü çocuğun resim galerisi içinde baktığı resmin kendisi, resim galerisini içine almaktadır, ama bu nedenle de resim tamamlanamazdır; resmin orta noktasında Escher'in imza için boş bıraktığı yer, resmin kendini kapatamayacağı bir noktadır. Benzeşimi sürdürürsek, gözdeki görme sinirlerinin gözün tümüne yayıldığı noktanın kör nokta olması gibi, yani görmeye kapalı olması

---

[2] D. R. Hofstadter. *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid.* Vintage Books ed. New York, 1980. Bu kitabın Türkçe baskısı için bkz. *Gödel, Escher, Bach: Bir Ebedi Gökçe Belik,* çev. Ergün Akça ve Hamide Koyukan, Kabalcı Yayınevi, 2001.

gibi. Yani "Resim Galerisi"nde tüm resmin yapılabilmesine olanak veren bu kör noktanın kendisi resmedilemiyor. Eğer Gödel'in, doğal sayılar aritmetiğini kapsayan bir biçimsel dizgenin tutarlılığının, bu dizgenin içinde kanıtlanamayacağını ortaya koyduğuna dikkat edilirse benzerliğin ilginçliği ortaya çıkıyor.

Gödel'in çalışmasından çıkan genel sonuç matematiğin mutlak sınırlarının çizildiği anlamına gelmiyor. Kendisi de bir Platoncu Gerçekçi olan Gödel'in açısından değerlendirerek şu yorum getirilebilir: Eğer matematiksel nesneler bizim tanımlarımızdan ve inşamızdan bağımsız olarak varsalar, matematikte karar verilemezliğe, tam olmamaya neden, matematiğin kendinden, kendi nesnelerinden gelen bir şey olmayabilir. Sorun bizim matematiğin nesnelerini aksiyomatikleştirmemizdeki sınırlardadır.

Bülent Gözkân
Nisan 1994
Göztepe

Yeni Baskı İçin

Gödel's Proof'un 2001'de yayımlanan gözden geçirilmiş baskısının editörlüğünü yapan Douglas R. Hofstadter, hayatında çok önemli bir yer tuttuğunu ifade ettiği bu kitapta önemli değişiklikler yapmış: Yeni dipnotlar eklemiş; mevcut dipnotlarda düzeltme ve eklemeler yapmış; ve Yeni Baskıya Önsöz'de belirttiği gerekçelerle kitabın VII. Bölüm'ünü neredeyse yeniden yazmış. Böylece kitabın, özellikle VII. Bölüm'ündeki Gödel sayılaştırmasmda ve ana uslamlamada eksik kalan hususlar ve mantıksal sıçrama içeren kısımlar düzeltilmiş.

Bu ikinci baskı, Hofstadter'in yaptığı düzeltme ve eklemeleri de dikkate alarak gözden geçirildi ve VII. Bölüm neredeyse yeniden çevrildi.

Çevirinin 1994'te yayımlanan ilk baskısına yazdığım Sunuş yazısında önemli bir değişiklik yapmadım. O sunuşta, Hofstadter'in bu kitaba olan aşkım pek de bilmeden, onun *Gödel, Escher, Bach* kitabından söz etmiştim. Yıllar sonra, 2002'de, sevgili dostum Aykut Köksal'la *Gödel, Escher, Bach* üzerine Açık Radyo'da 18 hafta süren bir program yaptık; bu radyo programının da bir kitap halinde yayımlanacağını umuyorum.

İkinci baskının Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi'nden çıkmasındaki desteklerinden dolayı Sayın Reşit Canbeyli ve Sayın Murat Gülsoy'a teşekkür ediyorum. Ayrıca İkinci baskının gözden geçirilmesindeki katkılarından dolayı da sevgili Ayfer Dost'a, Özge Ekin'e ve Sayın Ergun Kocabıyık'a teşekkürlerimi sunuyorum.

Yeni Baskıya Önsöz

Douglas R. Hofstadter

1959 yılının Ağustos ayında, ailemle Cenevre'de geçirdiğimiz bir yıldan sonra Kaliforniya'ya Stanford'a döndük. Ben o zaman on dört yaşındaydım. Fransızcam daha yeni akıcı hale gelmişti. Farklı dillere büyük ilgi duyuyordum ve yazı dizgeleri, simgeler ve anlamın gizemiyle büyülenmiştim. Matematiğe ve zihnin işleyişine ilişkin konularda merakla dolup taşıyordum.

Bir akşam, babamla birlikte kitapçıya gittik ve burada *Gödel Kanıtlaması* diye gizemli bir ismi olan küçük bir kitaba rastladım. Kitabın sayfalarını çevirirken, ilgi çekici şekiller ve simgelerle yazılmış ifadeler gördüm ve özellikle bir dipnot çok ilgimi çekti; bu dipnot tırnak işaretleri, simgeler ve simgeleri temsil eden diğer simgeler hakkındaydı. Sezgisel olarak, *Gödel Kanıtlaması* ile yazgılarımızın bir yerde kesişeceğini hissetmiştim; bu kitabı almam gerektiğini biliyordum.

Dışarı çıktığımızda babam, New York City College'da bu kitabın yazarlarından biri olan Ernest Nagel'dan felsefe dersi aldığını ve daha sonra da onunla iyi arkadaş olduklarını söyledi. Bu tesadüf, kitabın gizemine gizem kattı ve eve varır varmaz, kitabın her bir sözcüğünü yutarcasına okudum. Başından sonuna gelene kadar, *Gödel Kanıtlaması* tutkularımı ayağa kaldırmıştı; birden, doğruluk ve yanlışlık kavramları, paradokslar ve kanıtlamalar, haritalama ve yansıtma, simge kullanımları ve simgesel mantık, matematik ve üst-matematik, insanın düşünmesindeki yaratıcı sıçrayışların gizemi ve zihnin mekanizması bende takıntılı bir merak haline gelmişti. Bundan kısa bir süre sonra, babam kampüste Ernest Nagel ile karşılaştığını söyledi. Columbia Üniversitesi'nde çalışan Profesör Nagel, bir yıllığına Stanford'a gelmişti. Birkaç gün içinde Nagellar'la ailece gö-

rüştük. Ben Nagel ailesinin dört ferdine de, Ernest, Edith ve yaşları benimkine yakın olan oğulları Sandy ve Bobby'ye, hayran kalmıştım. Bu kadar çok sevdiğim bir kitabın yazarı ile tanışacak olmak beni heyecanlandırmıştı, fakat Ernest ve Edith, bilim, felsefe, müzik ve sanat için duyduğum ergen heyecanıma büyük bir içtenlikle ilgi göstermişlerdi.

Yakında Nagellar'ın Standford'daki süresi doluyordu, fakat ayrılmadan önce, beraber bir hafta geçirmek üzere beni Vermont'daki kır evlerine davet ettiler. Kırda geçirdiğimiz süre boyunca, Ernest ve Edith benim için nezaketin, cömertliğin ve alçak gönüllülüğün en güzel örneği oldular ve bütün bu geçen yıllar boyunca da hafızamda öyle kalmaya devam ettiler. Benim için en unutulmaz olay, Sandy ile bol güneşli öğleden sonraları çimenlerin üzerinde oturup *Gödel Kanıtlaması*'nın tamamını yüksek sesle okumamızdır. Bu kitabı, yazarlarından birinin oğluna okumak ne büyük bir zevkti!

Sonraki beş yıl içindeki mektuplaşmalarımızda, Sandy ve ben, sayıların örüntülerine [*pattern*] öylesine daldık ki, bu, benim hayatımı ve sanırım onun hayatını da derinden etkiledi. Alex adıyla tanınacak olan Sandy, bu yolda devam etti ve Wisconsin Üniversitesi'nde matematik profesörü oldu. Sidney adıyla tanınacak olan Bobby ile de arkadaşlığım sürdü. Bobby şu anda Chicago Üniversitesi'nde fizik profesörü; halen büyük bir keyifle görüşmeye devam ediyoruz. Keşke James Newman ile de tanıştığımı söyleyebilseydim. Liseden mezun olduğumda bana James Newman'ın *Matematiğin Dünyası* adlı dört ciltlik muhteşem eseri hediye edilmişti. Newman'ın ifade tarzına ve matematiğe olan aşkına hayrandım, fakat ne yazık ki, hiçbir zaman karşılaşamadık. Ben Stanford'da matematik okudum ve Nagel ve Newman'ın kitabındaki fikirlere olan ilgim beni üniversitede mantık ve üst-matematik dersleri almaya yöneltti; fakat bu derslerin yavanlığı beni fena halde hayal kırıklığına uğratmıştı. Bundan kısa bir süre sonra, matematikte lisansüstü eğitime başladım, fakat aynı hayal kırıklığı burada da devam etti. Bunun ardından matematiği bıraktım ve fiziğe yöneldim. Fakat birkaç yıl sonra kendimi bir kez daha soyutlamaların ve belirsizliklerin batağında buldum.

1972 yılıydı. Bir gün, biraz kafamı dağıtmak için üniversite kütüphanesinde kitap karıştırırken tıpkı 1959 yılında *Gödel Kanıtlaması*'nın bende yarattığı heyecanlandırıcı etkiye benzer bir etki yaratan Howard DeLong'un yazdığı *Matematiksel Mantığın Kısa Tarihi* adlı kitaba rastladım. Bu berrak bilimsel çalışma, benim, mantık, üst-matematik ve Gödel teoremi ve kanıtlamasıyla bağlantılandırdığım konuların harikulade karışımına olan aşkımın küllenen ateşini yeniden canlandırdı. Nagel ve Newman'ın o büyüleyici kitabının elimdeki kopyasını kaybettiğimden bir yenisini aldım; neyse ki hâlâ baskısı vardı! Kitabı yeniden büyülenerek bir kez daha okudum.

O yaz, lisansüstü eğitimime ara verip, arabayla ülkeyi dolaştım, kamp yaptım ve sıkı bir şekilde Gödel'in çalışmaları, akıl yürütmenin doğası ve düşünce ve bilincin mekanizmasını bulma hayali üzerine kitaplar okudum. Tamamen plansız bir şekilde gezimi New York'ta noktaladım. Burada ilk irtibata geçtiğim kişiler bana entelektüel ve duygusal anlamda akıl hocalığı yapan eski dostlarım Ernest ve Edith Nagel oldu. Sonraki birkaç ay boyunca, onların evinde sayısız akşamlar geçirdim, pek çok konu üzerine ateşli tartışmalar yaptık. Tartıştığımız konular arasında tabii ki Gödel'in kanıtlaması ve ondan çıkan sonuçlar da vardı.

1972 yılı benim için Gödel teoremi ve onu çevreleyen fikirlerin zengin alanına yoğun olarak girdiğim yıl oldu. Sonraki bir kaç yıl boyunca, bu fikirlerin bağlantıları üzerine kişisel bir dizi keşifte bulundum ve sonunda bunları *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid* adı altında bir kitapta topladım. Hiç kuşku yok ki, benim ortaya çıkardığım çalışma bir yanı ile, Nagel ve Newman'ın kitabı, diğer yanı ile Howard DeLong'un kitabından kaynaklanmıştır.

Peki, Gödel'in çalışması ne ile ilgilidir? 1906 doğumlu, Avusturyalı bir mantıkçı olan Kurt Gödel, matematik ile uğraşmaya başladığında, matematik dünyasında amansız bir biçimselleştirme eğilimi hâkimdi. Matematiksel düşünmenin, saf simgesel işlemlerin yasaları ile yakalanabileceğine inanılıyordu. Bu anlayışa göre, belirli bir aksiyomlar kümesinden ve belirli bir tipografik kurallar kümesinden hare-

ketle simge dizileri oluşturulabilir ve 'teorem' denilen yeni simge zincirleri üretebilirdi. Bu hareketin doruk noktası 1910-1913 yılları arasında Bertrand Russell ve Alfred North Whitehead tarafından yazılmış üç ciltlik muazzam yapıt *Principia Mathematica*'dır. Russell ve Whitehead, matematiğin tamamını saf mantıkta temellendirdiklerine ve çalışmalarının bundan sonra matematik için sağlam bir temel teşkil edeceğine inanıyorlardı.

Yaklaşık yirmi yıl sonra, Gödel bu yeni bakış açısına kuşku ile yaklaşmaya başladı ve bir gün, bu ciltlerdeki oldukça zorlu simge örüntüleri üzerinde çalışırken, bu örüntülerin sayı örüntülerine benzediklerini keşfetti ve her bir simgeyi bir sayı ile değiştirebileceği düşüncesi zihninde bir şimşek gibi çaktı. Bu şekilde düşününce, *Principia Mathematica*'nın tümünü bir simge dizisi oluşturma olarak değil, (modern bir terimden ödünç alarak ifade edersek) bir sayı bağlantısı kurmak [*number crunching*][1] olarak yeniden algıladı. Konuya bu şekilde bakmak, meselenin yukarıdan kuşatıcı bir şekilde görülmesine yol açtı: *Principia Mathematica*'nın nesne alanı sayılar olduğuna göre ve Gödel de bu ciltlerde kullanılan aracı ortamı [*medium*] sayılara dönüştürdüğüne göre, bu, *Principia Mathematica*'nın aslında kendi kendisinin nesnesi olduğunu gösteriyordu, diğer bir deyişle, Russell ve Whitehead'in dizgesinin belli bir örüntüye sahip olan tamdeyimleri[2] [*formula*], birbirleri hakkında ve hatta kendileri hakkında konuşuyormuş gibi görülebilirlerdi.

Bu kuşatıcı bakışla, olayların akışı hiç beklenmedik şekilde değişmişti; çünkü, bu kendine-gönderme [*self-reference*] kaçınılmaz olarak Gödel'in aklına, "bu cümle yanlıştır" gibi antik çağ paradokslarını getiriyordu. Bu tip paradoksları yol gösterici olarak kullanan Gödel, ilkece, *Principa Mathematica*'nın bir tamdeyimini kendine gönder-

---

[1] Bilgisayar işletiminin aslında sayılar arasında bir *processing* olmasına atfen. [—*Çev.*]

[2] Tamdeyim, bir biçimsel dizgenin kurallarına göre oluşturulmuş önerme anlamında kullanılmaktadır; bunların arasından kanıtlanabilenlere dizgenin teoremi adı verilir. [—*Çev.*]

me yapacak bir şekilde yeniden yazabileceğini fark etti: "Bu tamdeyim *Principa Mathematica*'nın kuralları ile kanıtlanamaz". Bu şekilde kendine dönen bir tamdeyim Russell ve Whitehead'in kurduğu gösterişli yapıya büyük bir tehditti, çünkü Russell ve Whitehead "döngüselliği" mutlak olarak bertaraf etmeyi neredeyse kutsal bir amaç olarak görmüşler ve bunu da başardıklarına inanmışlardı. Fakat, öyle görünüyordu ki döngüsellik arka kapıdan bu bakir dünyaya girmiş ve Pandora'nın kutusu ardına kadar açılmıştı.

Kendi kendini tahrip eden bu Gödelci tamdeyim meselesiyle ilgilenmek gerekiyordu; Gödel, bu tamdeyimin paradoksa benzemekle birlikte paradokstan ince bir şekilde ayrıldığını göstererek bu meseleye parlak bir çözüm buldu. Öyle ki, tamdeyimin doğru olduğu, fakat tamdeyimin doğruluğunun dizgenin kuralları kullanılarak kanıtlanamayacağı gösterilmiş oldu; gerçekten de, önerme, kanıtlanamazlığı doğruluğundan kaynaklanan doğru bir önermeydi.

Bu şaşırtıcı gözü peklikle Gödel, *Principia Mathematica*'nın kalesine hücum etmiş, tozu dumana katarak yıkılmasına sebep olmuştu. Gödel ayrıca yönteminin *Principa Mathematica*'nın amacını gerçekleştirmeye çalışan herhangi bir dizgeye uygulanabileceğini de göstermişti. Sonuç olarak Gödel, matematiksel düşüncenin aksiyomatik dizgelerin sağlamlığı ile yakalanabileceğine inananların umutlarını yıktı ve böylece matematikçi, mantıkçı ve felsefecileri, kanıtlanabilirlik ile doğruluğu geri dönüşsüz bir şekilde birbirinden ayıran bu yeni gizemli gediği keşfetmeye zorladı.

Gödel'den sonra, matematiksel düşünme sanatının ne kadar ince ve derin bir sanat olduğu ve bir zamanlar büyük umutlarla girişilen matematiksel düşünmeyi mekanikleştirme girişiminin tümüyle bir Donkişotluk olmasa bile zayıf bir girişim olduğu anlaşılmıştır. Peki, Gödel'den sonra matematiksel düşünmenin ne olduğuna inanılıyor? Gödel'den sonra matematiksel doğruluk nedir? Dahası, doğruluk nedir? İşte bunlar, Gödel'in yetmiş yıl önce yazdığı çığır açan makalesinden sonra hâlâ yanıtlanmayı bekleyen temel sorular.

Benim kitabım, Nagel ve Newman'a çok şey borçlu olsa da, onların vardığı felsefi sonuçların hepsiyle hemfikir de-

ğildir. Bu noktada, bu önemli farklılıklardan birini ifade etmek isterim. Nagel ve Newman, kitaplarının "Son Düşünceler" bölümünde Gödel'in keşiflerinden, "hesap yapan makineler" diye tabir ettikleri bilgisayarların, ilkece insan zihni kadar esnek akıl yürütemeyeceği sonucunun çıktığını iddia ediyorlar; bu iddiayı da, bilgisayarların "belirli bir komut kümesini"ni (yani bir programı) takip ettiği gerçeğine dayanarak öne sürüyorlar. Nagel ve Newman için "belirli bir komut kümesi" ifadesi, belirli bir aksiyomlar kümesine ve çıkarım kurallarına karşılık gelmektedir; ve program işletimi sırasında bilgisayarların yaptığı iş de, biçimsel bir dizgenin teoremlerini durmadan dizgesel şekilde kanıtlayan bir makinenin yaptığı işe karşılık gelmektedir. Bilgisayarların, biçimsel dizgelere bu şekilde haritalanması (eşlenmesi) "hesap yapan makine" terimini kelimesi kelimesine almaktır, yani sadece sayılarla ve aritmetiksel olgularla uğraşan bir makine. Böyle bir makinenin, doğası gereği, matematik hakkında doğru önermeler üreteceği düşüncesi kışkırtıcıdır ve kesinlikle bir doğruluk payı da içerir; ancak bu düşünce bilgisayarların gücü ve çok yönlü becerisine ilişkin kapsamlı bir kavrayışı ortaya koymaktan da uzaktır.

Bilgisayarlar, taşıdıkları ad gereği, kesin aritmetik temelli bir donanım [*hardware*] üzerine kurulu olsa da, bu tasarımda onları ayrılmaz bir şekilde matematiksel doğruluğa götüren bir yan yoktur. Bir bilgisayar için yanlış hesaplamalar ("2 + 2 = 5; 0/0 = 43" vb.) yapmak, biçimsel bir dizge içinde teoremler üretmekten daha zor değildir. Daha ince bir meydan okuma, bilgisayarın da, her matematikçinin yaptığı gibi görsel imgeler, kavramları birbirine bağlayan çağrışımlı örüntüler, tahmine imkân veren sezgisel süreçler, analoji ve estetik seçim gibi süreçleri kullanarak matematiksel fikirler (sadece matematiksel simge zincirleri değil) keşfetmesine imkân sağlayacak "belirli bir komut kümesi" oluşturmaktır.

Nagel ve Newman, *Gödel Kanıtlaması*'nı yazarlarken, bilgisayarların da insanlar gibi düşünmesini sağlamak amacı, bir diğer deyişle, yapay zekâ düşüncesi henüz yeniydi ve bunun gerçekleşmesi ihtimali de belirgin değildi. İlk yıllardaki ana itici güç, bilgisayarları, aksiyomatik dizgelerin me-

kanik somutlaşması olarak kullandı ve böylece teoremlerin kanıtlamalarını üretmekten başka bir şey yapılmadı. Şurası kabul edilmelidir ki, eğer bu yaklaşım, bilgisayarların bilgiyi modellerken ilkece nasıl kullanıldıklarının tüm kapsamını temsil ediyor idiyse, gerçekten de Nagel ve Newman, Gödel'in keşiflerine dayanarak, bilgisayarların, yaptıkları hesaplamalar ne kadar hızlı, bellekleri ne kadar kapsamlı olursa olsun, insan zihninden daha az esnek ve daha az basiretli olduğu yönündeki iddialarında haklı olurlardı.

Fakat teorem kanıtlamak, bilgisayarları düşünür kılmak için takip edilecek yollardan, incelikten en yoksun olanıdır. 1970'lerin başında Douglas Lenat tarafından yazılan "AM" programını düşünün. AM, matematiksel önermeler yerine, kavramlarla çalışır; programın amacı estetik ve basitliğin en yalın modelini kullanarak "ilginç" olanı aramaktır. AM, işe sıfırdan başlayarak sayılar kuramının pek çok kavramını keşfetmiştir. AM, teoremleri mantıksal olarak kanıtlamak yerine, ilkel estetik duyargasını takip edip örüntüleri 'koklayarak' ve bunlar hakkında kestirimlerde bulunarak sayı dünyasını keşfe çıkmıştır. Parlak zekalı bir insanda olabileceği kadar, AM'nin tahminlerinin de çoğu doğruydu, bazıları yanlıştı ve pek azı için de hâlâ karar verilememiştir.

Zihinsel süreçleri bilişimsel olarak modelleme yollarından bir diğerini, teorem kanıtlama paradigmasından olabildiğince uzak modelleme yolu olan sinir ağlarını ele alalım. Beyin hücreleri belli örüntüler halinde birbirleriyle bağlantı içinde olduklarından ve bu örüntüler program yazılımlarında örnek alınabileceğinden, yani, "belirli bir komut kümesi" olarak alınabileceklerinden, hesap yapan bir makinenin gücü mikroskobik beyin devrelerini ve onun davranışlarını örnek almakta işe yarayabilir. Bilişsel bilimciler, bu modeller üzerinde yıllardır çalışılıyorlar ve bu süre içinde otomatik kısa devre olarak ortaya çıkan hata yapma gibi davranışların da içinde olduğu insanın öğrenme becerisinin pek çok örüntüsü tamamen kopyalandı.

Sayılarını çoğaltabileceğim bu iki örneğin işaret ettiği şey, bütün esnekliği ve yanılabilir olmanın ihtişamı ile insan düşüncesinin, ilkece, "belirli bir komut kümesi" ile

modellenebileceğidir; tabii eğer bilgisayarların aritmetik işlemler üzerine inşa edildiği ve tek yaptıklarının bir köle gibi itaatkâr bir şekilde gerçeği, bütün gerçeği ve yalnızca gerçeği üretebileceği ön kabulünden kendimizi kurtarabilirsek. Bu fikir, kabul etmek gerekir ki, biçimsel aksiyomatik akıl yürütme dizgelerinin çekirdeğinde yatar; fakat bugün hiç kimse, bu dizgeleri, insan zihninin yapabileceklerine dair bir model olarak ciddiye almamaktadır, hatta zihnin yaptığı en mantıksal işlerde bile. Artık anlıyoruz ki, insan zihni temel olarak bir mantık motoru değildir, fakat bir analoji motorudur, bir öğrenme motorudur, bir tahmin motorudur, estetik arayışı içinde olan bir motordur ve kendi hatasını düzelten bir motordur. Bu sonucu da derinlemesine kavrayarak, artık bu özelliklerden bazılarına sahip olan bir "belirli komut kümeleri" yapabilecek durumdayız.

Kuşkusuz, insan zihninin esnekliğine yaklaşabilen bir bilgisayar programını henüz üretebilmiş değiliz ve bu anlamda Ernest Nagel ve James Newman, şiirsel bir dille "Gödel'in teoremi, umutsuzluğa bir bahane değildir, ama yaratıcı aklın gücünün yeniden değerlendirilmesi için bir fırsattır" diye yazarken aslında doğru iz üzerindeydiler. Bu, daha iyi ifade edilemezdi.

Bununla birlikte, Nagel ve Newman'ın Gödel'in sonuçlarına ilişkin yorumlarında bir ironi de bulunmaktadır. Nagel ve Newman'ın okurlarının göreceği gibi, Gödel'in dehasının en çarpıcı noktası, sayıların, her türlü örüntünün içine yerleşebileceği aracı ortam olarak görülmesi ve bu sebeple de sadece sayılar hakkında imiş gibi görünen önermelerin aslında diğer söylem evrenlerini de kodlayan önermeler olduğunun idrak edilmesidir. Diğer bir deyişle, Gödel, sayıların herhangi bir yapıyı temsil edebileceğini idrak ederek, sayılar kuramının görünen yüzünün ötesine geçebilmiştir. Gödelci sıçramanın bilgisayarla ilgili benzeşimi şu şekilde görülebilir: Bilgisayarlar temelde sayı bağlantıları ile işledikleri için ve herhangi bir örüntü türünün yerleştirilmesi için sayılar, evrensel aracı ortam olduklarından, bilgisayarlar, tüm keyfi örüntüler ile uğraşabilirler, bunlar ister mantıksal veya mantık dışı, ister tutarlı veya tutarsız olsunlar. Kısaca

ifade edersek, tıpkı ekranın piksellerine bakan bir gözün, ekrandan uzaklaştıkça anlamlı bir yüz görmesi ve 0 ve 1'in ortadan kalması gibi, birbirleriyle ilişkili sayı örüntülerinin çokluğundan yeteri kadar uzaklaşıldığında da, farklı alanların örüntüleri oluşturulabilir. Bu Gödelci bilgisayar anlayışı modern dünyada o derecede yaygınlaşmıştır ki, bugün bilgisayarların sayısal altyapısı [*substrate*], konunun uzmanları dışındakiler için görünür olmaktan çok uzaktır. Sıradan insanlar, bilgisayarı rutin olarak yazı yazmak, oyun oynamak, iletişim kurmak, animasyon veya tasarım hazırlamak, çizim yapmak ve benzeri amaçlarla kullanırken donanımın derinliklerinde cereyan eden aritmetik işlemleri düşünmezler. Bilişsel bilimciler, bilgisayarlarının aritmetik donanımının hatasızlığına ve yaratıcılıktan uzak oluşuna dayanarak, insanın hata yapma ve yaratıcılıklarını modellemek için bilgisayarlara "belirli komut kümeleri" veriyorlar. En azından ilke olarak, yaratıcı matematiksel düşünme süreçlerinin, bilgisayarları kullanarak modellenemeyeceğini düşünmek için hiçbir neden yoktur. Fakat, 1950'lerde, bilgisayarların böyle olanaklara sahip olabileceğini düşünmek kolay değildi. Yine de, Gödel'in, sayıların, örüntüler dünyasını içine aldığına yönelik derin kavrayışına övgü olarak yazılmış bir kitapta, öncelikli felsefi sonucun, bu kavrayışa kulak vermemek olması ve böylece de hesap yapan makinelerin akla gelebilen her tür örüntüyü, hatta yaratıcı insan zihnini bile kopyalayabileceğinin göz ardı edilmiş olması ironiktir.

Son olarak, bu klasik metinde teknik bazı değişiklikler yapma özgürlüğünü neden kullandığımı kısaca açıklamak isterim. Bu kitap genelde eleştirmenlerden sıcak övgüler almış olsa da, kitabın yer yer gerektiği kadar açık olmadığını ve bu sebeple okuyucuları yanıltma riski taşıdığını düşünen eleştirmenler de oldu. İlk başlarda ben de kitapta böyle kusurlar olduğunun farkına varmamıştım, fakat aradan uzun zaman geçtikten sonra *Gödel Kanıtlaması*'nı buradaki bazı fikirleri kendim mümkün olduğu kadar açık ve anlaşılır bir şekilde ifade etme gereği ile yeniden okuduğumda, yedinci bölümdeki bazı kısımları anlamadım ve bir süre sonra anlamamamın tümüyle benim hatam olmadığını fark ettim. Bu

sevgili kitabın bazı kusurları olduğunu görmek beni üzdü; fakat, belli ki bunun için yapabileceğim bir şey de yoktu. Gariptir ki, yine de elimdeki kopyanın sayfa boşluklarına yakaladığım eksiklikleri not aldım ve bunların nasıl düzeltilebileceğine dair notlar düştüm; sanki bir gün New York Üniversitesi Yayınevi'nden durup dururken benden bu kitabın yeni baskısına bir önsöz yazmamı isteyen bir elektronik posta alacağımı hissetmişim gibi.

İnanıyorum ki ben, Ernest Nagel ve James Newman'ın bu küçük yapıtından derinden etkilenmiş okuyuculardan yalnızca biriyim. Burada onların ortaya çıkardığı bu değerli mücevheri yeni milenyum için parlatma ve yeni bir ışıltı kazandırma fırsatı buldum; bunu yapabilmeyi de yine onlara borçluyum. Bunu yaparak saygıdeğer akıl hocalarıma ihanet etmekten çok onların coşkulu ve sadık takipçisi olarak saygımı sunduğuma inanmak isterim.

Kavram ve Biliş Araştırmaları Merkezi
Indiana Universitesi, Bloomington

Teşekkür

Kitabın yazarları olarak, Columbia Üniversitesi'nden Profesör John C. Cooley'e tüm yardımları için teşekkürlerimizi sunarız. Profesör Cooley, bu kitabın ilk müsveddesini eleştirel bir gözle okumuş ve burada öne sürdüğümüz tezi netleştirmemiz ve mantıkla ilgili konuların sunumunu geliştirmemiz için bize yardımcı olmuştur. *Scientific American* dergisi, Haziran 1956 sayısında yayımlanan Gödel'in makalesinde bulunan pek çok diyagramı kitapta kullanmamıza izin verdi, bunun için kendilerine teşekkür ederiz. New York Üniversitesi'nden Profesör Morris Kline'a kitapla ilgili değerli önerilerinden dolayı müteşekkiriz.

Gödel Kanıtlaması

I

GİRİŞ

1931 yılında, Almanca yayımlanan bilimsel bir dergide, ürkütücü bir ad taşıyan oldukça kısa sayılabilecek bir makale yayımlandı: "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme" ("*Principia Mathematica* ve İlişkili Dizgelerin Biçimsel Olarak Kararlaştırılamayan Önermeleri Üzerine"). Yazarı, Viyana Üniversitesi'nden 25 yaşında genç bir matematikçi olan Kurt Gödel'di; Gödel 1938'den itibaren de Princeton İleri Araştırmalar Enstitüsü'nün sürekli üyesi oldu. Bu makale mantık ve matematik tarihinin kilometre taşlarından biridir. Harvard Üniversitesi 1952'de Gödel'i onursal dereceyle ödüllendirdiğinde, çalışması yakın zamanlarda mantıkta yapılan en önemli ilerlemelerden biri olarak tanımlanmıştı.

Bununla birlikte, başlangıçta pek çok matematikçi için makalenin ne adı ne de içeriği anlaşılabilir durumdaydı. Makalenin başlığında adı geçen *Principia Mathematica*, matematiksel mantığın ve matematiğin temelleri üzerine Alfred North Whitehead ve Bertrand Russell'ın birlikte yazdıkları üç ciltlik anıtsal çalışmadır ve bu çalışma hakkında bilgi sahibi olmak, matematiğin birçok dalında başarılı çalışmalar yapmak için bir ön gereklilik değildir. Üstelik Gödel'in makalesi çok sınırlı sayıda uzmanın dışında kimsenin ilgisini çekmeyecek sorunlarla uğraşıyordu. Kanıtlamada kullanılan usavurmanın yayımlandığı dönem için çok yeni olması nedeniyle, ancak çok özel bir alanın teknik yayınlarını çok yakından izleyenler uslamlamayı tam anlamıyla kavrayabildiler. Ancak bugün Gödel'in ulaştığı sonuçların yaygın felsefi etkisiyle devrimci bir nitelik taşıdığı artık bilinmektedir. Elinizdeki bu kitabın amacı, Gödel'in buluşunun özünü ve kanıtlamasının ana hatlarını uzman olmayan okuyucuya

ulaştırabilmektir.

Gödel'in ünlü makalesi matematiğin temellerindeki çok önemli bir sorunu ele almaktadır. Sorunu daha iyi anlayabilmek için, onun ortaya çıktığı tarihsel bağlamı kısaca ele almakta yarar var. Temel geometriyi öğrenmiş olan herkes onun *tümdengelimli* bir bilim kolu olarak öğretildiğini anımsayacaktır. Temel geometri, teoremleri gözlemlerle uyum içinde olsa da, deneye dayanan bir bilim olarak sunulmamıştır. Bir önermenin açık *mantıksal kanıtlamaların* bir sonucu olabileceği anlayışı, "aksiyomatik yöntem" diye bilinen yöntemi bulan ve bu yöntemi dizgesel bir biçimde geometriyi geliştirmek için kullanmış olan Eski Yunanlılara kadar geri gitmektedir. "Aksiyomatik yöntem", bazı önermelerin *kanıtlanmaksızın* aksiyom ya da postulat olarak kabul edilerek (Örneğin, "Bir noktadan başka bir noktaya ancak bir tek doğru çizilebilir" aksiyomu), dizgenin diğer tüm önermelerinin bu aksiyomlardan teorem olarak türetilmesidir. Aksiyomlar dizgenin "temellerini" oluştururlar; teoremler de "üstyapıyı" oluşturur ve mantık ilkelerinin yardımıyla aksiyomlardan elde edilirler.

Geometrinin aksiyomatik gelişimi çağlar boyunca düşünürler üzerinde çok büyük etki yaptı. Çünkü görece az sayıda aksiyom, onlardan türetilebilecek sayısız önermelerin tüm yükünü taşıyordu. Üstelik, eğer bir şekilde aksiyomların doğruluğu sağlanmışsa –gerçekten de 2000 yıl boyunca birçok insan bu aksiyomların uzay hakkındaki doğruluklar olduğuna koşulsuzca inandı– tüm teoremlerin hem doğruluğu, hem de karşılıklı tutarlılıkları kendiliğinden sağlanmış oluyordu. Bu nedenlerden dolayı, geometrinin aksiyomatik biçimi birçok dönemin en önemli düşünürlerine bilimsel bilginin en iyi modeli olarak göründü. Böylece geometrinin yanı sıra, diğer düşünce dallarının da sağlam bir aksiyomatik temele oturtulup oturtulamayacağı doğal olarak soruldu. Bununla beraber, her ne kadar antik çağda fiziğin bazı kısımlarının aksiyomatik formülasyonu yapılmışsa da (örneğin, Archimedes tarafından), modern çağa kadar geometri, birçok insanın sağlam aksiyomatik temeller üzerine kurulmuş olduğunu düşündüğü tek matematik dalı olarak kaldı.

Ancak son iki yüz yıl içinde aksiyomatik yöntem artan bir çabayla ve güçle tüketildi. Matematiğin yeni dallarının yanında, eski dalları da, örneğin sayal sayıların[1] (veya "tam" sayıların) özellikleri hakkındaki çalışmalar,[2] görünüşte sağlam aksiyom kümeleri olarak kurulmuşlardı. Sonuçta öyle bir genel kanı egemen oldu ki, matematiksel düşüncenin her dalının, sonsuz sayıda doğru önermeler topluluğuna olanak verecek biçimde dizgesel olarak bir aksiyomlar kümesi ile kurulabileceği, açıkça söylenmese de varsayılır oldu.

Gödel'in makalesi bu varsayımın desteklenemez olduğunu göstermiştir. Gödel, aksiyomatik yöntemin bazı içsel sınırlamaları olduğunu, hatta negatif olmayan tamsayıların özelliklerinin bile tümüyle aksiyomatikleştirilemeyeceği sonucunu, bu şaşırtıcı ve biraz da hüzünlü sonucu matematik âlemine sundu. Dahası, çok karmaşık usavurma ilkeleri kullanılmadıkça –ki bu ilkelerin kendi iç tutarlılıkları da dizgelerin kendi iç tutarlılıkları kadar kuşkuya açıktır– çok geniş tümdengelimli dizgeler sınıfının (örneğin sayılar kuramı) iç mantıksal tutarlılığını oluşturmanın olanaksız olduğunu

---

1 Sayal sayı (kardinal sayı veya sayma sayısı), bir kümenin öğelerinin toplam sayısını veren, yani "kaç tane" sorusuna yanıt veren tamsayıdır. [—*Çev.*]

2 Tarihi Eski Yunanlılara uzanan sayılar kuramı, 0, 1, 2, 3, ... gibi doğal sayıların ("sayal sayı" veya "negatif olmayan tamsayılar" olarak da adlandırılırlar) özelliklerinin incelenmesidir. Bu özellikler şunları içerir: Bir sayının kaç tane çarpanı vardır; bir sayı, küçük sayıların toplamı olarak kaç farklı türde ifade edilebilir; belirlenmiş bir özelliğe sahip bir en büyük sayı var mıdır; çözümü tam sayı olan denklemler var mıdır vb. Her ne kadar sayılar kuramı tüketilemezcesine zengin ve sürprizlerle dolu olsa da, söz dağarı küçücüktür; bir düzine simgeden oluşan bir abece sayılar kuramının her önermesini ifade etmeye olanak vermektedir (ifadeler fazlaca uzun ve kabarık olsa da). Bu kitapta, "aritmetik" terimini zaman zaman "sayılar kuramı" ile eşanlamlı olarak kullanacağız. Ancak bu terim elbette doğal sayıların özelliklerinin dopdolu, zengin evrenine işaret etmektedir; ilkokullarda okutulduğu gibi sadece toplama, çıkarma, çarpma ve bölmenin mekanik işleyişine ilişkin değildir veya yazar kasalarda ve toplama makinelerinde mekanikleşenle sınırlı değildir. [—*Ed.*]

kanıtladı. Artık bu sonuçların ışığında, birçok önemli matematik alanının nihai dizgeleştirilmesine ulaşılamayacağı ve birçok önemli matematiksel düşünce dallarından hiçbirinin, iç çelişkiden tümüyle arınmış olduğunun mutlak bir güvencesinin verilemeyeceği anlaşılmış oldu.

Böylece Gödel'in bulguları kökleşmiş önyargıları temellerinden sarsarken, matematiğin temelleri üzerine yapılan araştırmalardan çok şeyler bekleyen eski umutları da yıktı. Ancak bu makale tümüyle de olumsuz değildi. Temeller sorunu üzerindeki çalışmalara, René Descartes'ın geometriye getirdiği cebirsel yöntemin doğası ve verimliliğiyle kıyaslanabilecek yeni çözümleme teknikleri kazandırdı. Bu teknikler de mantıksal ve matematiksel araştırmalara yeni sorular getirdi ve esinledi. Matematik felsefesinde ve genelde bilgi felsefelerinde, halen de süregiden yeni bir değerlendirme yapma gereğini ortaya çıkardı.

Gödel'in çağ açıcı makalesindeki kanıtlamasının ayrıntılarını önemli bir matematik eğitimi almadan izleyebilmek çok güçtür. Bununla birlikte bu kanıtlamanın temel yapısı ve sonuçlarının esası, çok sınırlı bir matematiksel ve mantıksal hazırlığa sahip okuyucu için anlaşılır kılınabilir. Bu düzeyde bir anlayışa ulaşabilmek için, matematik ve modern biçimsel mantık tarihindeki konuyla ilgili gelişmelerin kısa bir incelemesini vermek okuyucu için yararlı olacaktır. Bu denemenin bundan sonraki dört bölümü sözü edilen incelemeye ayrılmıştır.

II

TUTARLILIK SORUNU

On dokuzuncu yüzyıl, matematiksel araştırmalarda muazzam bir genişlemeye ve derinleşmeye tanık oldu. Önceki düşünürlerin büyük çabalarına konu olmuş birçok temel sorun çözüldü; matematiksel çalışmalarda yeni alanlar yaratıldı; birçok dalın temelleri atıldı veya eski dallar daha kesin çözümleme teknikleri sayesinde tümüyle yeniden düzenlendi. Örneklemek gerekirse, Eski Yunanlılar temel geometride üç problem öne sürmüşlerdi: Bir açıyı cetvel ve pergelle üçe bölmek; verilen bir kübün hacminin iki katına eşit bir küp çizmek; ve verilen bir çemberin alanına eşit bir kare çizmek. 2000 yıldan fazla bir zaman boyunca bu problemleri çözmek için birçok başarısız girişimde bulunuldu. Sonunda on dokuzuncu yüzyılda, bu çizimleri yapabilmenin mantıksal olarak olanaklı olmadığı kanıtlandı. Bununla birlikte bu çabaların çok değerli yan ürünleri de vardı. Çözümler esas olarak belli denklemleri sağlayan köklerin belirlenmesine bağlı oldukları için, antik çağın ünlü problemlerine karşı olan ilgi, sayının doğası ve sayı sürekliliğinin yapısı hakkındaki derin araştırmaları da özendirdi. Eksi, karmaşık [*complex*] ve oransız [*irrational*] sayıların kesin tanımları sağlandığı gibi, gerçek sayılar dizgesinin mantıksal temeli de oluşturuldu ve matematiğin yeni bir dalı olan sonsuz sayılar kuramı kuruldu.

Fakat belki de, sonraki matematik tarihi üzerinde en kalıcı etkiyi bırakan gelişme, Eski Yunanlıların ortaya attıkları ve yanıtlayamadıkları bir sorunun çözümü oldu. Bu, Eukleides'in geometriyi dizgeleştirirken kullandığı aksiyomlardan paralellerle ilgili olanıydı. Eukleides'in kabul ettiği aksiyom, bir doğruya dışındaki bir noktadan bir ve yalnız bir paralel doğru çizilebileceğine ilişkin varsayımla mantıksal olarak eşdeğerdir (her ne kadar aynı olmasa da). Çeşit-

li nedenlerden dolayı bu aksiyom, o dönemin insanlarına kendinden-apaçık [*self-evident*] bir önerme gibi gelmedi. Bu yüzden, bu aksiyomu açıkça kendinden-apaçık saydıkları diğer Eukleides aksiyomlarından çıkarımlamayı düşündüler.[1] Paralel aksiyomunun böyle bir kanıtı verilebilir miydi? Nesiller boyu, matematikçiler sonuçsuzca bu soruyla boğuştular. Ancak bir kanıtlamanın bulunamaması demek, yüzyıllardır burunları akmakta olan ve bu gidişle de her zaman akmaya devam edecek insanlar için nezleye bir çare bulunamaması gibi hiçbir şey bulunamadığı anlamına gelmiyor. Özellikle Gauss, Bolyai, Lobatchevsky ve Riemann'ın çalışmaları sayesinde, paralel aksiyomunu diğer aksiyomlardan çıkarımlamanın olanaksız olduğunun gösterilmesi, on dokuzuncu yüzyıla kadar başarılabilmiş değildi. Bu sonuç çok aydınlatıcı bir öneme sahiptir. Öncelikle, belli bir dizge içindeki bazı önermelerin kanıtlanabilmesinin olanaksız olduğunun da kanıtlanabileceğine çarpıcı bir biçimde dikkatleri çekmişti. İleride göreceğimiz gibi, Gödel'in makalesi de sayılar kuramında bazı önemli önermelerinin kanıtlanabilmelerinin olanaksız olduğu üzerinedir. Ayrıca, paralel aksiyomu sorununun çözümlenmesi, Eukleides geometrisinin, geometri konusunda söylenebilecek en son söz olmadığının anlaşılmasını sağladı. Çünkü, Eukleides'in aksiyomlarından farklı

---

[1] Bu aksiyomun kendiliğinden apaçık olmasında bir eksiklik olduğunun düşünülmesindeki asıl sebep, paralel aksiyomunun uzayın sonsuzca uzak bölgeleri hakkında bir bildirimde bulunuyor olması gerçeğinde yatıyor. Eukleides, paralel doğruları, düzlem üzerinde her iki doğrultuda da sınırsızca uzatıldıklarında bile kesişmeyen doğru çizgiler olarak tanımlıyor. Buna göre, iki doğrunun paralel olduklarını söylemek, bu iki doğrunun "sonsuzda" bile kabul edilmesinde kesişmeyeceklerini öne sürmek oluyor. Ancak o dönemin matematikçileri, sonlu bölgelerde kesişmiyor olsalar bile, sonsuzda kesişen çizgiler fikrine yabancı değillerdi. Böyle çizgilere asimtotik çizgiler deniyor. Örneğin bir hiperbol, eksenlerine asimtotiktir. Demek ki, bir doğru çizgiye, onun dışındaki bir noktadan yalnızca bir tek doğru çizgi çizilebileceği ve bunun da ne kadar uzatılırsa uzatılsın sonsuzda dahi ilk doğru çizgiyle kesişmeyeceği fikri, eski geometricilere sezgisel olarak açık değildi.

ve onlarla bağdaşmaz aksiyomlarla yeni geometri dizgelerinin kurulabileceği ortaya çıktı. Bilindiği üzere, Eukleides'in paralel aksiyomunun, bir doğruya dışındaki bir noktadan birden fazla paralel doğru çizilebileceği veya hiçbir paralelin çizilemeyeceği varsayımıyla değiştirilmesi çok ilginç ve yararlı sonuçların ortaya çıkmasına neden olmuştur. Geometri aksiyomlarının (veya herhangi bir disiplinin aksiyomlarının) aşikâr biçimde kendinden-apaçık olmaları sayesinde ortaya konduklarına dair geleneksel inanç köklü bir biçimde sarsılmıştır. Ayrıca arı matematikçinin asıl işlevinin *aksiyomlaştırılmış varsayımlardan teoremleri türetmek olduğu* ve aksiyomların gerçekten doğru olup olmadığına karar vermenin matematikçinin işi olmadığı, giderek daha açık bir biçimde anlaşıldı. Sonuçta, geleneksel geometrideki başarılı gelişmeler, diğer matematik dizgelerinin de aksiyomatik temellerinin gözden geçirilmesini ve tamamlanmasını özendirdi. Daha önce az çok sezgisel bir biçimde ele alınan araştırma konularının aksiyomatik temelleri de sonunda kurulmuş oldu (Bkz *Ek Notlar 1*).

Matematiğin temelleriyle ilgili bu ilginç çalışmalardan çıkan toplu sonuç, matematiği "niceliklerin bilimi" olarak niteleyen eski anlayışın hem eksik hem de yanıltıcı olduğudur. Çünkü son gelişmelerden sonra, matematiğin yalnızca herhangi bir aksiyom veya postulat kümesinden mantıksal olarak çıkabilecek sonuçları bulmaya yarayan *en üstün* bilim kolu olduğu açıklığa kavuşmuş oldu. Gerçekten de, bir matematiksel çıkarımın geçerliliğinin, aksiyomlarda geçen terimlerin veya ifadelerin özel anlamlarıyla hiçbir ilişkisinin olmadığı anlaşıldı. Böylece matematiğin geleneksel olarak sanılandan çok daha soyut ve biçimsel olduğu anlaşıldı: Daha soyut –çünkü matematiksel önermeler, ilkece matematiğin doğasından çıktığı düşünülen nesneler kümesi veya nesnelerin özellikleri yerine her nasıl isteniyorsa öyle yorumlanabilirler– daha biçimsel –çünkü matematiksel kanıtlamaların geçerlilikleri, belirli bir konu alanına dayanarak değil, önermelerin biçimsel yapılarına dayanarak yapılmaktadır. Kanıtlamalı matematiğin herhangi bir dalının aksiyomları uzayla, nicelikle, elmalarla, açılarla veya bütçeyle doğasın-

dan gelen bir bağla ilgili değildir ve aksiyomlardaki terimlere (veya "betimsel yüklemlere") yüklenen anlamlar, teoremlerin türetilme sürecinde hiçbir önemli rol oynamamaktadır. Arı matematikçinin karşısındaki asıl sorunun (matematiği kendi alanlarında kullanan bilim adamlarından farklı olarak) varsaydığı aksiyomların veya onlardan çıkarımladığı sonuçların doğru olup olmadığına karar vermek değil, fakat çıkarımlandığı öne sürülen sonuçların başlangıçtaki varsayımların *zorunlu mantıksal sonuçları* olup olmadığını incelemek olduğunu bir kez daha yineliyoruz.

Bir örnek verelim. Büyük Alman matematikçisi David Hilbert'in ilk kez 1899'da yayımlanan, geometrinin ünlü aksiyomlaştırılmasında kullandığı tanımlanmamış (veya ilksel) terimler içinde 'nokta', 'çizgi', 'üzerinde olmak' ve 'arasında' yer almaktadır. Bu ifadelerin alışılmış anlamlarının, teoremlerin keşfedilmesi ve öğrenilmesi sürecinde bir rol oynadığını kabul edebiliriz. Bu ifadelerin anlamlarına yatkın olduğumuz için onların çeşitli kullanımlarındaki karşılıklı ilişkileri anladığımızı duyumsarız, bunlar aksiyomların seçimine ve ifadesine de yön verirler; ayrıca bunlar, teorem olabileceklerini umduğumuz önermeleri de formüle etmemizi kolaylaştırırlar. Bununla birlikte, Hilbert'in açıkça söylediği gibi, matematiğin asıl görevi olan önermeler arasındaki arı mantıksal ilişkilerin bağımlılığı söz konusu olduğunda, ilksel terimlerin alışılmış çağrışımları bir kenara bırakılmalı ve onlara yüklenecek yegâne anlamın içinde yer aldığı aksiyomlara bağlı olduğu anlaşılmalı.[2] Bu, Russell'ın ünlü vecizesinin işaret ettiği noktadır: Arı matematik, ne neden söz ettiğimizi, ne de söylediklerimizin doğru olup olmadığını bilmediğimiz bir alandır.[3]

Alışık olunan hiçbir işaretin olmadığı tam bir soyutluk alanında yolunu bulabilmek elbette kolay değildir. Ancak bu durum, yeni hareket özgürlükleri ve görüş olanakları

---

[2] Daha teknik bir deyişle, ilksel terimler, örtük olarak aksiyomlar tarafından tanımlanmaktadırlar ve örtük tanımlamada yer almayan terimlerin, teoremlerin kanıtlanmasında yeri yoktur.

[3] Mistisizm ve Mantık [—*Çev.*]

açısından bir telafi de sağlamaktadır. Matematiğin artan biçimselleştirilmesiyle, insan zihni yeni aksiyom dizgelerinin inşa edilmesinde yer alan terimlerin alışılmış yorumlarından kaynaklanan sınırlamalardan kurtulmuştur. Geleneksel matematikten birçok bakımdan ayrılan yeni tür cebir ve geometriler geliştirilmiştir. Bazı terimlerin anlamları daha genelleştikçe, kullanımları da genişlemekte ve onlarla yapılan çıkarımlar daha az güvenilir olmaktadır. Biçimselleştirme, matematiksel bakımdan çok önemli ve değerli dizgelerin kurulmasına olanak vermektedir. Ama kabul etmek gerekir ki, bu dizgelerden bazıları Eukleides geometrisinin veya aritmetiğin sahip oldukları ölçüde sezgisel yoruma (yani sağduyuya) elverişli değillerdir; ancak bunun da fazla bir önemi yok. Çünkü, bir kere, sezgi esnek bir yetidir; birkaç nesil önce tümüyle sezgi dışı kabul edilen fikirlerden, bugün artık korkmadığımız gibi olasıdır ki, çocuklarımız da görelilik kuramının paradokslarını sezgisel olarak kabul etmekte zorlanmayacaklardır. Üstelik, hepimizin bildiği gibi, sezgi o kadar da güvenli bir rehber değildir; sezgi, bilimsel araştırmalarda doğruluk veya verimlilik ölçütü olarak sağlıklı bir yarar sağlamaz.

Matematiğin giderek artan soyutluğu, ciddi sorunları da beraberinde getirdi. Bir dizgenin temellerini oluşturan bir aksiyomlar kümesinin kendi içinde tutarlı olup olmadığı sorusu ortaya çıktı, yani dizge kendi içinde tutarlıysa birbirleriyle çelişik teoremlerin aksiyomlardan çıkarımlanamaması gerekiyordu. Eğer bir aksiyom kümesi belirli ve bilinen nesneler alanı hakkındaysa ortaya çok büyük bir sorun çıkmamaktadır, çünkü bu nesneler hakkındaki aksiyomların gerçekten doğru olup olmadıklarını sormak olanağı yanında, onların doğruluklarını araştırabilme olanağı da ortaya çıkmaktadır. Eukleides aksiyomlarının genel olarak uzay hakkında (veya uzaydaki nesneler hakkında) doğru önermeler oldukları varsayıldığından, on dokuzuncu yüzyıla kadar hiçbir matematikçi "acaba bu aksiyomlardan çelişkili teorem çiftleri çıkar mı" diye düşünmedi. Eukleides geometrisinin tutarlılığına karşı gösterilmiş bu güvenin temelinde birbirleriyle mantıkça bağdaşmayan önermelerin, ikisinin birden

aynı zamanda doğru olamayacağını söyleyen sağlam bir ilke yatıyordu; buna göre, eğer bir önermeler kümesi doğru ise (ki Eukleides aksiyomlarının doğru oldukları kabul ediliyordu), bu önermeler karşılıklı olarak tutarlıdırlar.

Eukleides-dışı geometriler açıkça farklı bir kategoride bulunmaktadırlar. Onların aksiyomlarına başlangıçta uzay hakkında açıkça yanlış önermeler olarak bakılmış ve bu nedenle herhangi bir konuda doğru olabilecekleri kuşkuyla karşılanmıştı. Bu nedenle Eukleides-dışı dizgelerin kendi içlerinde tutarlı olduklarını ortaya koymak sorunu hem çok zor, hem de nazik bir sorun olarak düşünülüyordu. Örneğin, Riemann geometrisinde (eliptik geometride) Eukleides'in paralel aksiyomu 'bir doğruya dışındaki bir noktadan *hiçbir* paralel çizilemez' varsayımıyla değiştirilmişti. Şimdi şu soruyu soralım: Riemann aksiyomları kendi içlerinde tutarlılar mı? Aksiyomlarının günlük deneyimin uzayı için doğru olmadıkları açıktır. Öyleyse tutarlı oldukları nasıl gösterilebilir? Onların birbirleriyle çelişen teoremlere yol açmayacakları nasıl kanıtlanabilir? Şimdiye kadar çıkarımlanmış teoremlerin birbirleriyle çelişik olmamaları sorunu çözmemektedir; çünkü bir sonraki teoremin işleri karıştırabilmesi her zaman olanaklıdır. Öyleyse sorun tümüyle çözülmeden Riemann geometrisinin Eukleides dizgesine bir alternatif olduğundan, yani matematiksel anlamda onun kadar geçerli olduğundan emin olunamaz. Demek ki tutarlılık sorununun çözümüne kadar Eukleides-dışı geometrilerin olanaklılıkları ancak rastlantısal ya da olumsal olabilir.

Bu sorunu çözmek için genel bir yöntem geliştirildi. Yöntemin altında yatan temel fikir şuydu: Dizgenin soyut aksiyomları için öyle bir model (ya da yorumlama) bulunacaktı ki, her aksiyom modelin doğru bir önermesine çevrilebilsin. Daha önce söylediğimiz gibi Eukleides geometrisi için model, bildiğimiz uzaydı. Yöntem başka modeller bulmak ve soyut aksiyomların tutarlılıklarını belirlemekte dayanak olacak öğeleri saptamak için kullanıldı. Yöntemin izlediği yol aşağı yukarı şöyledir: 'sınıf' sözcüğüyle birbirlerinden ayırt edilebilir öğelerden oluşan bir topluluğu anlayalım, bu öğelerden her birine sınıfın bir üyesi diyelim. Böylece 10'dan küçük

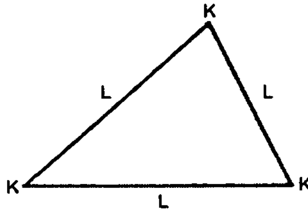
asal sayılar sınıfı, üyeleri 2, 3, 5 ve 7 olan bir topluluktur. Aksiyomlarda örtük olarak tanımlananlar dışında özellikleri belirlenmemiş olan K ve L sınıflarını konu alan aşağıdaki gibi bir aksiyom dizgesi varsayalım:

1. K'nın herhangi iki üyesi, L'nin yalnızca bir üyesine dahildir.
2. K'nın hiçbir üyesi, L'nin ikiden fazla üyesine dahil değildir.
3. L'nin bir tek üyesi, K'nın tüm üyelerini içermemektedir.
4. L'nin herhangi iki üyesi, K'nın bir tek üyesini içermektedir.
5. K'nın ikiden fazla üyesini içeren hiçbir L üyesi yoktur.

Bilinen çıkarım kurallarını kullanarak bu küçük aksiyomlar kümesinden çok sayıda teorem türetebiliriz. Örneğin, K'nın tam üç üyesi olduğu gösterilebilir. Ama acaba bu aksiyomlar kümesi tutarlı mıdır, yani ondan birbirleriyle çelişen teoremler hiçbir zaman türetilemez mi? Bu soru aşağıdaki model sayesinde rahatlıkla yanıtlanabilir.

K, bir üçgenin tepe noktalarını oluşturan noktaların, L de üçgenin kenarlarını oluşturan çizgilerin sınıfı olsun; "K'nm bir üyesi L'nin bir üyesine dahildir" ifadesini, "bir tepe noktası onun tarafındaki bir çizginin üzerinde bulunmaktadır" biçiminde anlayalım. Böylece beş soyut aksiyomun her biri doğru önermelere dönüşmüş olur. Örneğin, bu durumda birinci aksiyom, üçgenin iki tepe noktasının onların tarafındaki bir tek doğrunun üzerinde olduğunu öne sürmektedir (Bkz. *Şekil 1*). Bu yolla aksiyomlar kümesinin tutarlı olduğu kanıtlanmış olur.

Düzlem Riemann geometrisinin tutarlılığı da, görünüşte, aksiyomları somutlaştırarak sağlanabilir. Riemann aksiyomlarındaki 'düzlem' deyimini Eukleidesçi küre yüzeyini anlatacak biçimde, 'nokta' deyimini bu yüzeyin üzerindeki bir noktayı anlatacak biçimde, 'doğru çizgi' deyimini de bu yüzeyin üzerindeki büyük çemberin bir yayı olacak biçimde



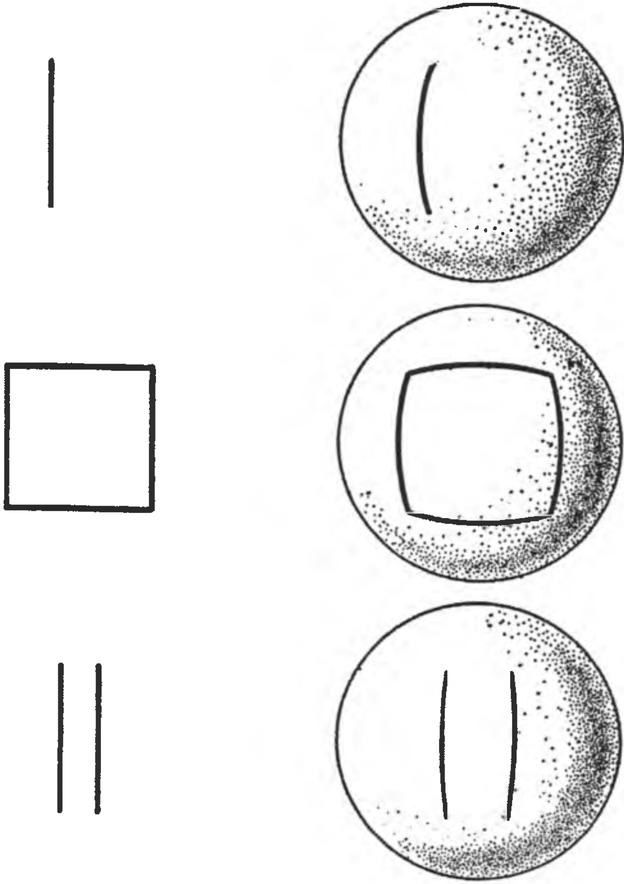
Şekil 1.

K ve L sınıfları hakkındaki aksiyomlar kümesi için verilen model, tepe noktalarının K'nın üyeleri ve kenarların da L'nin üyeleri olduğu bir üçgendir. Geometrik model aksiyomların tutarlı olduğunu göstermektedir.

yorumlayabiliriz ve bu böyle sürebilir. Böylece her Riemann aksiyomu Eukleides'in bir teoremine dönüşmüş olur. Örneğin, bu yorumda Riemann'ın paralel aksiyomu şöyle okunur: Kürenin yüzeyindeki bir noktadan geçen, büyük bir çemberin bir yayına paralel olabilecek hiçbir büyük çember yayı yoktur (Bkz *Şekil 2*)

Riemann geometrisinin bu tutarlılık kanıtı ilk bakışta yeterli görünebilir. Ancak konuya dikkatle bakınca durum böyle değildir. Çünkü iyi incelendiğinde sorunun çözülmemiş olduğu, yalnızca başka bir alana kaydırıldığı fark edilecektir. Riemann geometrisinin tutarlılık kanıtının verilmesinde Eukleides geometrisinin tutarlığına başvurulmuştur. Öyleyse buradan çıkan tek sonuç şudur: Riemann geometrisi tutarlıdır ancak Eukleides geometrisi tutarlıysa. Böylece Eukleides'in yetkesi onun tek geçerli dizge olmasını tehdit eden bir başka dizgenin tutarlılığının gösterilmesinde yardıma çağrılmıştır. Kaçınılmaz soru ise şudur: Eukleides dizgesinin aksiyomları kendi içlerinde tutarlı mıdır?

Daha önce de değindiğimiz gibi, uzun bir gelenek boyunca bu soruya kutsal bir yanıt vardı, o da, Eukleides'in aksiyomlarının doğru ve dolayısıyla da tutarlı olduklarıydı. Bu yanıta artık kabul edilebilir gözüyle bakılmıyor. Birazdan bu konuya döneceğiz ve bu yanıtın niye doyurucu olmadığını açıklayacağız. Verilebilecek diğer bir yanıt da, uzay de-



Şekil 2.

Bernhard Riemann'ın Eukleides-dışı geometrisi, Eukleidesçi bir modelle temsil edilebilir. Riemann düzlemi, Eukleidesçi kürenin yüzeyi olmaktadır: Düzlem üzerindeki noktalar, bu yüzey üzerindeki noktalar oluyor; düzlem üzerindeki doğru çizgiler, büyük çemberler oluyor. Demek ki, doğru çizgi parçalarıyla sınırlanmış Riemann düzleminin bir parçası, büyük çemberlerin (ortadaki) bir kısmı tarafından sınırlanmış kürenin bir parçası gibi betimleniyor. Riemann düzlemindeki iki çizgi parçası, Eukleidesçi küre üzerindeki (en alttaki) iki büyük çember parçası oluyor; ve bunlar uzatıldıklarında birbirleriyle kesişirler ve böylece paralel aksiyomuyla da çelişmiş olurlar.

neyimlerimiz sınırlı da olsa, aksiyomların onlara uyduğu ve onları sınırlı olandan evrensele doğru genişleterek doğruladığımız yolundadır. Ancak ne kadar çok tümevarımsal kanıt bu iddiayı destekler görünürse görünsün, tam kanıtlama mantıksal olarak eksik kalacaktır. Üstelik her ne kadar tüm gözlemlenmiş olgular aksiyomlarla uyum içerisinde olsa bile şimdiye kadar gözlemlenmemiş bir olgunun aksiyomlarla çelişebilme olanağı her zaman vardır ve böyle bir durumda da onların evrensel olma özellikleri çökecektir. Tümevarımsal yaklaşımlarla aksiyomların akla yakın oldukları veya olasılıkla doğru olduklarından daha fazlası gösterilemez.

Hilbert, farklı bir yolla sonuca ulaşmayı denedi. Onun yolunun anahtarı da kartezyen koordinat geometrisinde yatmaktadır. Hilbert'in yorumuyla Eukleides'in aksiyomları basit cebirsel doğruluklara dönüştürüldüler. Örneğin düzlem geometrisinin aksiyomlarında 'nokta' ifadesi bir sayı çiftiyle karşılanmıştır; aynı biçimde 'doğru çizgi' ifadesi iki bilinmeyenli birinci dereceden denklemle ifade edilen sayılar arasındaki doğrusal (lineer) ilişkiyle, 'çember' ifadesi de ikinci dereceden bir denklemle ifade edilen sayılar arasındaki ilişkiyle karşılanmıştır, örnekler çoğaltılabilir. Böylece iki noktanın bir tek doğru çizgi belirlediğine ilişkin geometrik sav, iki farklı sayı çiftinin bir tek çizgisel ilişkiyi belirlediğine ilişkin cebirsel doğruluğa dönüşmüştür; bir doğru çizginin bir çemberi en çok iki noktadan kestiğine ilişkin geometrik teorem, iki bilinmeyenli iki denklem çiftinin (denklemlerden biri birinci dereceden diğeri ise ikinci derecedendir) en fazla iki gerçek sayı çifti belirlediğine ilişkin cebirsel teoreme dönüşmüştür, örnekler çoğaltılabilir. Kısaca, Eukleides aksiyomlarının tutarlılığı sonucuna bir cebirsel modeli sağladıkları gösterilerek varılmıştır. Bu yöntem tutarlılığa ulaşmada etkin ve sağlamdır. Yine de bu yöntem daha önceki karşı çıkmaya dayanabilecek güçte değildir. Çünkü daha önce olduğu gibi bir alandaki sorun, başka bir alana aktarılarak çözümlenmek istenmiştir. Hilbert'in kendi geometri aksiyomlarının tutarlılığını gösteren uslamlaması, cebrin tutarlı olması koşuluyla kendi geometri dizgesinin tutarlı olacağı fikrine dayanmaktadır. Kanıtlama açıkça tutarlılığı

varsayılan bir diğer dizgeye göreli olmaktadır ve 'mutlak' bir kanıtlama değildir.

Tutarlılık sorununu çözme girişimlerinde önemli bir güçlükle karşılaşılmaktadır. Bu güçlük aksiyomların sonsuz sayıda öğeden oluşmuş modellerle yorumlanmalarından kaynaklanmaktadır. Bu durum, modelleri sınırlı sayıda gözlemin içine sığdırabilmeyi olanaksız hale getirmektedir; dolayısıyla aksiyomların doğruluğu kuşkuya açık olmaktadır. Eukleides geometrisinin doğruluğu konusunda tümevarımsal bir uslamlamada, uzay hakkında gözlemi yapılan sonlu sayıda olgu, büyük ölçüde aksiyomlarla uyum içindedir. Ancak uslamlamanın ulaşmak istediği sonuç, sonlu bir veri kümesinden sonsuz olana doğru bir ötetaşıma [*extrapolation*] içermektedir. Böyle bir sıçramayı nasıl doğrulayabiliriz? Öte yandan sınırlı sayıda öğeyle oluşturulmuş uygun bir model, güçlüğü tümüyle ortadan kaldırmamakta, ancak hafifletmektedir. K ve L sınıfları hakkındaki beş soyut aksiyomun tutarlı olduklarının gösterilmesinde kullanılan üçgen modeli sonlu bir modeldir. Ayrıca bu model diğerleriyle karşılaştırıldığında, modelin tüm öğelerinin aksiyomları sağlayıp sağlamadığını göstermek için, yani bunların doğru olup olmadıklarını (sonuç olarak tutarlılıklarını) belirlemek konusunda son derece basit bir modeldir. Örnekleyelim: Model üçgenin tüm tepe noktalarını incelediğimizde bunlardan herhangi ikisinin yalnız bir doğru çizgi üzerinde bulunduğunu, dolayısıyla birinci aksiyomun doğru olduğunu görürüz. Bu modelin hem öğeleri, hem de onların karşılıklı ilişkileri doğrudan ve sonuçlandırıcı incelemeye açık oldukları için, ayrıca bu incelemede bir yanlışın ortaya çıkması söz konusu bile olmadığı için, bu aksiyomların tutarlılığı konusunda hiçbir kuşkuya yer yoktur.

Ne yazık ki, matematiğin önemli dallarının temellerini oluşturan birçok aksiyom dizgesi sonlu modeller olarak yansıtılamazlar. Temel aritmetikte, her tamsayının hemen ondan sonra gelen ve önceki tamsayılardan farklı bir ardılı olduğunu öne süren aksiyomu dikkate alın. Bu aksiyomu ilgilendiren kümeyi sınamak için gerekli olan modelin sonlu olamayacağı açıktır, yani sonsuz sayıda öğeyi içermesi ge-

rekmektedir. Demek ki, kümelerin doğruluğu (dolayısıyla tutarlılığı) sınırlı sayıda öğeyle tüketici bir biçimde sağlanamaz. Görünüşte bir çıkmazda bulunuyoruz. Sonlu modeller ilkece belirli aksiyom kümelerinin tutarlılıklarının saptanmasında yeterli olmaktadırlar; ancak bunun matematiksel önemi azdır. Matematiksel açıdan önemli birçok aksiyom dizgesinin yorumlanmasında gerekli olan sonlu olmayan modeller ise yalnızca genel terimlerle betimlenebilirler; bu durumda betimlemenin hiçbir gizli çelişki içermediği sonucuna da varamayız.

Bu noktada, eğer sonlu olmayan modellerin temel kavramları saydamlıkla ve 'açık seçik' olarak kullanılırlarsa, bu modellerin tutarlılığından emin olunabileceği yönündeki düşünce çekici görünmektedir. Ancak düşünce tarihi açık ve seçik fikirlerin öğretisiyle veya öne sürmelerde örtük olan sezgisel bilginin öğretisiyle tam anlamıyla ilgilenmemiştir. Sonsuz kümelerle ilgili varsayımların matematiksel araştırmalarda çok önemli roller oynadığı alanlarda, ortaya çok kökten çelişkiler çıkmıştır; üstelik bu, varsayımlarda yer alan kavramların sezgisel açıklıklarına ve oluşturulan yapının görünüşteki tutarlılık fikrine rağmen olmuştur. Cantor tarafından on dokuzuncu yüzyılda geliştirilen sonsuz sayılar kuramında bu tür çelişkiler (teknik olarak çatışkı da [antinomi] diyebiliriz) ortaya çıkmıştır; ve bu çelişkilerin ortaya çıkması da, *sınıf*[4] (veya *topluluk*) gibi görünüşte çok açık sanılan temel kavramların, onlarla kurulmuş herhangi bir dizgenin tutarlılığını güvence edemediğini ortaya çıkarmıştır. Matematiğin diğer dallarının ve özellikle de sayılar kuramının temellerini oluşturduğu kabul edilen ve kümelerin öğelerinin özellikleri ve ilişkileriyle ilgilenen matematiksel kümeler kuramının ortaya çıkmasından beri, sonsuz kümeler kuramında karşılaşılan

---

[4] Bu kitapta 'sınıf' terimini, bugün genellikle 'küme' sözcüğüyle ifade edilen bir anlamda kullanıyoruz. Whitehead ve Russell'ın *Principia Mathematica*'yı yazdığı ve Gödel'in keşiflerini yaptığı yıllarda kullanılan terim 'sınıf' idi. Biz yine de bu sözcüğü kullanacağız, çünkü bizim hakkında yazdığımız dönemi daha iyi yansıtmaktadır. [—*ed.*] [Editörün bu notunu belirttik ama, çevirinin ilk baskısında kullandığımız 'küme' terimini bu baskıda da koruyoruz (—*Çev.*)]

çelişkilerin matematiğin diğer kısımlarının formüle edilmesine de sıçrayıp sıçramayacağı özellikle sorulmuştur.

Gerçekten de, Bertrand Russell temel mantığın kendi çerçevesi içinde ilk kez Cantorcu sonsuz kümeler kuramında ortaya çıkan çelişkiye çok benzer bir çelişki ortaya çıkardı. Russell Paradoksu aşağıdaki gibi ifade edilebilir. Kümeler iki çeşide ayrılabilir: Kendisi de kendisinin oluşturduğu kümenin üyesi olan kümeler ve kendi kendisinin üyesi olmayan kümeler. Bir küme, eğer kendi kendisinin üyesi değilse bu kümeye 'normal küme', eğer kendi kendisinin üyesi ise bu kümeye de 'normal-dışı' küme adı verilecek. 'Normal' kümeye bir örnek olarak matematikçiler kümesi verilebilir, çünkü matematikçiler kümesinin kendisi bir matematikçi değildir, dolayısıyla kendi kendisinin üyesi değildir. 'Normal-dışı' kümeye örnek olarak tüm düşünülebilir şeylerin kümesi verilebilir; çünkü tüm düşünülebilir şeylerin kümesinin kendisi de düşünülebilir bir şeydir, dolayısıyla kendi kendisinin üyesidir. 'N' tanım olarak *tüm* normal kümeleri temsil etsin. Şimdi N'nin kendisi de acaba normal bir küme midir diye soruyoruz. Eğer N normal ise, kendi kendisinin bir üyesidir (çünkü N tanımca, tüm normal kümeleri kapsamaktadır); ancak, bu durumda, N normal-dışı bir kümedir; çünkü kendi kendisinin üyesi olan bir küme tanımca normal-dışıdır. Öte yandan, eğer N normal-dışı ise kendi kendisinin bir üyesidir (normal-dışı kümenin tanımından); ancak, bu durumda, N normaldir, çünkü N'nin üyeleri tanımca normal kümelerdir. Özetle, N'nin normal olması ancak N normal-dışı olduğunda söz konusudur. Buradan da çıkan sonuç, 'N normaldir' önermesinin hem doğru hem de yanlış olduğudur. Bu kaçınılamaz çelişki görünüşte açık seçik bir kavram olduğu sanılan küme (ya da sınıf) kavramının tartışılmadan kullanılmasının bir sonucu olmuştur. Daha sonraları başka paradokslar da bulunmuştur; bunlardan her biri de bilinen ve ilk bakışta ikna edici usavurma kalıplarına uygun olarak oluşturulmuşlardır. Böylelikle matematikçiler, tutarlı dizgelerin geliştirilmesinde aşinalık ve sezgisel açıklığın çürük dayanaklar olduğunu idrak etmiş oldular.

Tutarlılık sorununun önemini gördük; ayrıca bu so-

runun modeller yardımıyla belirli klasik yöntemler içinde çözümleri hakkında bilgi sahibi olduk. Birçok durumda sorunun, içinde saklı tutarsızlıkları barındırabilecek sonlu olmayan modellerin kullanımını gerektirdiği gösterildi. Demek ki, model yöntemi matematikte çok önemli bir araç olsa da, bu sorunun çözümü için tasarımlanması soruna nihai bir yanıt sağlamamaktadır.

III

Tutarlılığın Mutlak Kanıtlaması

Tutarlılığın belirlenmesinde model kullanımının, içsel sınırlılıkları ve birçok matematiksel dizgenin kabul olunmuş formülasyonlarında iç çelişkilerin ortaya çıkabileceğinin anlaşılması, sorunun yeni yaklaşımlarla ele alınmasına neden oldu. Göreli tutarlılık kanıtına bir alternatif Hilbert tarafından önerildi. Hilbert, 'mutlak' kanıtlamayı sağlayabilecek yolları ararken bir dizgenin tutarlılığını belirlemek için bir başka dizgenin tutarlı olduğunu varsaymanın gerekmediğini öne sürdü. Bu yaklaşımı, Gödel'in sonuçlarının anlaşılmasına bir ön hazırlık olarak ele alacağız.

Hilbert'in yaklaşımıyla mutlak kanıtlamayı sağlamakta atılacak ilk adım, bir tümdengelimli dizgenin *tam olarak biçimselleştirilmesidir* [*formalisation*]. Bu tam biçimselleştirme dizgede geçen deyimleri anlamlarından tümüyle arındırmayı içerir; bu deyimler yalnızca içi boş imler olarak görülmelidirler. Bu imlerin nasıl bir araya gelecekleri ve kullanılacakları bir dizi kesin kuralla sağlanacaktır. Bu işlemin amacı, içinde saklı bir şeyin bulunmadığı ve ona açıklıkla dahil edilenlerden başkasını içermeyen bir imler dizgesi (*calculus*) inşa etmektir. Tümüyle biçimselleştirilmiş bir dizgenin aksiyom ve teoremleri, temel imlerini daha büyük birimlere dönüştürecek biçimde kurallarla bir araya gelmiş, *anlam içermeyen* zincirlerdir (ya da sonlu uzun dizilerdir). Ayrıca bir dizge tümüyle biçimselleştiğinde, teoremlerin aksiyomlardan türetilmesi, böylesi bir 'zincir' kümesini (kurallar izleyerek), başka bir 'zincir' kümesine dönüştürmekten başka bir şey olmayacaktır. Bu sayede, açıkça ifade edilmeyen usavurma ilkelerinin kullanılabilme riski de ortadan kalkar. Biçimselleştirme güç ve ustalık gerektiren bir iştir, ancak çok önemli bir amaca hizmet etmektedir. Yapıyı ve işlevi bir makinenin

çalışma modeli gibi tüm çıplaklığıyla ortaya çıkarmaktadır. Bir dizge biçimselleştiğinde, matematiksel önermeler arasındaki mantıksal ilişkiler açıklıkla ortaya çıkar; çeşitli içeriksiz zincirlerin yapısal örgüsünü, birbirlerine nasıl bağlandıklarını, nasıl bir araya geldiklerini görmek olanaklı olur.

Bu şekilde biçimselleştirilmiş matematiğin 'anlam içermeyen' işaretleriyle kaplı bir sayfa hiçbir şey öne sürmemektedir; bu, yalnızca belirli bir yapıya sahip olan soyut bir tasarım ya da mozaiktir.[1] Yine de böyle bir dizgenin mevcut yapısını betimlemek ve bu mevcut yapı hakkında, birbiriyle olan karşılık ilişkileri hakkında söz söylemek olanaklıdır. Bir 'zincir'in palendrom özelliğine sahip olduğunu (sağdan sola ve soldan sağa aynı şekilde okunabilen ifadeler; ["anastas mum satsana" gibi]) veya bir başka 'zincir'e benzediği ya da bir zincirin diğer üçünden oluştuğuna ve benzerlerine

---

1 Böyle bir biçimselleştirilmiş hesabı daha açıkça betimleyebilmenin yolu, simgelerinin anlama sahipmiş gibi göründüklerini söylemektir (ve hesabın kuralları da simgeleri öyle bir şekilde bir araya getirebilir ki, sanki bu simgeler, onlara verilen anlama uygun bir şekilde işlevlerini sürdürürler). Ancak simgelerin davranışları anlamlarının bir sonucu değildir; aslında tam tersi geçerlidir. Biçimsel simgelerin anlamlı görülmesi ölçüsünde, bu görünüş tümüyle onların davranışlarından kaynaklanmaktadır ki, bu davranışlar da tümüyle dizgenin kuralları ve ilksel tamdeyimleri (aksiyomları) ile belirlenmiştir. Dolayısıyla, "anlam içermeyen zincirlerin" bir çeşit anlamlılığa sahip olmasında tümüyle gerekçelendirilemez veya akla uymayan bir yan yoktur, sadece bu anlam içermenin etkin değil, edilgin olduğunu dikkate almak gerekir. Bu yaklaşımı mecazla açıklamak gerekirse, zincirler ve onları oluşturan simgeler, başkalarının onlarda görmek istediği varsayılan anlamları öyle pek de umursamazlar; onların önemsediği, kuralların onlara yüklediği işlevlerdir.

Bir benzeşim kuralım: Arabanıza bir hayvan adı verebilirsiniz, hatta onu bir canlı olarak düşünebilirsiniz; ancak araba nasıl işliyorsa, arabanın adı ve varsayılan "ruhu" olsun veya olmasın yine öyle işlemeye devam edecektir. Önemli olan onu yürüten mekanik yapıdır. Arabanın adı veya ruhu, her ne kadar sizin onunla daha sıcak bir bağ kurmanıza yardımcı olsa da, mekanik yapısı üzerinde bir etki yaratmaz. Sevilen arabalar için durum ne ise, biçimsel hesaplar için de odur. [—*Ed.*]

ilişkin sözler söyleyebiliriz. Böyle önermeler elbette anlamlıdırlar ve biçimsel dizge hakkında önemli bilgiler iletebilirler. Bununla beraber içeriksiz (veya biçimsel) bir matematiksel dizge *hakkındaki* bu anlamlı önermelerin kendilerinin, bu dizgeye ait olmadıklarını görmek gerekir. Bunlar, Hilbert'in üst-matematik [meta-matematik] dediği matematik *hakkındaki* dile aittirler. Üst-matematiksel önermeler, biçimselleştirilmiş bir matematiksel dizgede (yani bir biçimsel dizgede) geçen imler hakkındaki önermelerdir; yani bu imlerin türleri ve "tamdeyim" [*formula*] adı verilen daha uzun 'zincirler' biçiminde bir araya gelişleri hakkında veya belirlenen kuralların sonucunda elde edilen tamdeyimlerin birbirleriyle ilişkileri hakkındaki önermelerdir.

Vereceğimiz birkaç örnek, Hilbert'in matematik (yani "anlamı içermeyen" imler) ile üst-matematik (yani, matematik hakkında ve matematikte geçen imlerin bir araya gelişleri ve ilişkileri hakkında anlamı olan önermeler) ayrımının anlaşılmasına yardımcı olacaktır. Şu deyimi ele alalım:

2 + 3 = 5

Bu deyim matematiğe (aritmetiğe) aittir ve tümüyle temel aritmetiksel imlerden oluşturulmuştur. Öte yandan,

"2 + 3 = 5" bir aritmetik tamdeyimidir [formülüdür]

önermesi, işaret edilen deyim hakkında bir şeyler öne sürmektedir. Bu önerme bir aritmetiksel olgu ifade etmemektedir ve aritmetiğin biçimsel diline ait değildir; üst-matematiğe aittir, çünkü aritmetiğin tamdeyim biçimindeki belli bir zincirini nitelendirmektedir. Aşağıdaki önerme de bir üst-matematik önermesidir:

Eğer '=' imi bir aritmetik tamdeyiminde kullanılacaksa, sayısal deyimler imin hem sağında hem de solunda yer almalıdır.

Bu önerme, bir aritmetik iminin aritmetiksel bir tamdeyimde kullanılabilmesinin zorunlu koşulunu belirtmektedir; bu imi kullanacak bir aritmetiksel tamdeyimin yapısına işaret etmektedir.

Şu üç tamdeyimi göz önüne alalım:

$$x = x$$
$$0 = 0$$
$$0 \neq 0$$

Her üçü de matematiğin [aritmetiğin] önermeleridir, çünkü her biri de tümüyle aritmetiksel imlerden oluşmaktadır. Ancak

'x' bir değişkendir

önermesi bir üst-matematik önermesidir; çünkü özel bir im kümesine (yani değişkenler kümesine) ait bir aritmetik imini tanımlamaktadır. Yine, aşağıdaki önerme üst-matematiğe aittir:

> '$0 = 0$' tamdeyimi, değişken 'x'in yerine '0' koyularak '$x = x$' tamdeyiminden türetilebilir.

Bir matematiksel tamdeyimin, bir diğerinden ne şekilde elde edilebileceğini saptamaktadır ve böylece, iki tamdeyimin birbiriyle nasıl bir ilişki içinde olduğunu betimlemektedir. Benzer biçimde

'$0 \neq 0$' biçimsel dizge X'in bir teoremi değildir

önermesi üst-matematiğe aittir; çünkü belli bir tamdeyimin yukarıda sözü edilen belli bir biçimsel dizgenin aksiyomlarından çıkarılamayacağını bildirmektedir ve böylelikle, dizgenin işaret edilen önermeleri arasında bazı ilişkilerin sağlanmadığını öne sürmektedir. Son olarak, şu önerme de üst-matematiğe aittir:

Biçimsel dizge X tutarlıdır.

(yani X dizgesinin aksiyomlarından birbirleriyle çelişik iki önerme çıkarımlamak olanaklı değildir. Örneğin '$0 = 0$' ve '$0 \neq 0$' gibi önermeleri). Bu önerme açıkça bir biçimsel dizge hakkındadır ve herhangi türden bir tamdeyim çiftinin, o dizgenin aksiyomlarını oluşturan tamdeyimlerle özel bir ilişki

içinde olmadığını öne sürmektedir.[2]

Okur üst-matematik sözcüğünü kafa karıştırıcı bulabilir. Sözcüğün hoş olduğunu biz de iddia etmiyoruz; ancak bu kavramın, iyi bilinen bir ayrım olan, üzerinde çalışılan konu ile bu konu hakkındaki söylem arasındaki ayrımı vurgulamak için kullanıldığı söylenirse, artık kimsenin kafası karışmayacaktır. "Erkek deniz çullukları kuluçkaya yatar" önermesi zooloğun araştırdığı bir konunun önermesidir ve

---

2 Metinde verilen üst-matematiksel önermelerin, kendilerinin bir parçası olarak örneklerde görülen matematiksel imlerden ve tamdeyimlerden hiçbirini oluşturucu öge olarak içermediğini görmek önemlidir. İlk bakışta bu bildirim açıkça doğru görünmektedir; çünkü imler ve tamdeyimler tam olarak görülebilir. Ancak eğer önerme çözümleyici bir gözle incelenirse, bu noktanın önemi anlaşılır. Üst-matematiksel önermeler, bazı aritmetiksel deyimlerin adlarını içermektedirler, ama aritmetiksel deyimlerin kendilerini içermemektedirler. Ayrım son derece ince olmakla birlikte geçerli ve önemlidir. Tümceler, deyimlerin karşılık geldiği nesneleri değil, bu nesnelerin yalnızca adlarını içerirler. Yani, bir kentten söz ettiğimizde, elbette tümceye yerleştirdiğimiz kentin kendisi değil, adıdır; benzer biçimde, bir sözcükten (veya bir dilsel imden) söz etmek istediğimizde, tümcede gözüken o sözcüğün (veya imin) kendisi değil, adıdır. Alışılmış uzlaşıma göre bir dilsel deyimin adından, onu tırnak imi içine alarak söz ediyoruz. Bizim metinde de bu uzlaşıma uyulmaktadır. Örneğin aşağıdaki gibi bir tümce yazmak geçerlidir:

İstanbul büyük bir kenttir.

Ama şunu yazmak geçerli değildir:

İstanbul üç hecelidir.

Sonuncu tümcede anlatılmak isteneni ifade etmek için şöyle yazmak gerekir:

'İstanbul' üç hecelidir.

Benzer biçimde,

$x = 5$ bir denklemdir.

diye yazmak geçerli değildir. Bunun yerine,

'$x = 5$' bir denklemdir.

diye yazılması gerekir.

zoolojiye aittir; ancak deniz çullukları hakkındaki bu önermenin zoolojinin akıldışı olduğunu gösterdiğini söylersek, önermemiz deniz çullukları üzerine bir önerme değildir, ama bilim dalına ait olan bir önermenin, yani üst-zoolojinin bir önermesidir. "İd"in, "ego"dan daha güçlü olduğunu söylersek, ortodoks psikanalize ait bir sav öne sürmüş oluruz; ancak bu önermenin anlamsız ya da kanıtlanamaz olduğunu söylüyorsak, bu eleştirimiz üst-psikanalize aittir. Matematik ve üst matematikte de durum böyledir. Matematikçinin inşa ettiği biçimsel dizgeler "matematik" denilen alana aittir; öte yandan bu dizgeler hakkındaki betimlemeler, tartışmalar ve kuramlaştırmalar "üst-matematik" dediğimiz alana aittir.

Matematikle üst-matematik arasındaki ayrım bizim konumuz açısından son derece önemli bir ayrımdır. Bu ayrımın önemini gözden kaçırmak paradoksların ve karışıklığın ortaya çıkmasına neden olmuştur. Bu ayrımın anlamının kabul edilmesi matematiksel usavurmanın mantıksal yapısını aydınlığa kavuşturmuştur. Böylelikle gizli varsayımlardan ve yersiz anlam yüklemelerden arınmış bir biçimsel dizgenin [*calculus*] imlerinin dikkatle bir araya toplanması olanağı doğmuştur. Ayrıca bu ayrım, matematiksel çalışmalarda ve çıkarımlarda kullanılan işlemlerin ve mantıksal kuralların kesin tanımlarını gerektirmiştir ki, birçok matematikçi bunları kullanırken nelerden yararlandığının açık seçik farkında olmamıştır.

Hilbert sorunun özünü görmüştü; tutarlılığın "mutlak" kanıtlaması girişimini bir biçimsel dizgeyle onun betimi arasındaki ayrıma dayandırdı. Hilbert, belirli aksiyom kümelerinin tutarlılığını oluşturmakta kullanılan sonlu model yönteminin yol açtığı mantıksal kuşkuların çok ötesinde bir yöntem geliştirmeyi amaçladı; bu yöntem tam biçimselleştirilmiş bir dizgenin sonlu sayıda ifadelerinin yapısal özelliklerinin bir çözümlenmesiydi. Çözümleme, dizgede yer alan çeşitli imleri saptamak, bunların tamdeyimlerde nasıl bir araya geldiklerini, bir tamdeyimden bir diğerinin nasıl elde edildiğini ve eldeki bir tamdeyimin belirlenmiş işlem kurallarının kullanımıyla türetilip türetilemediğini araştırmaktan oluşmaktadır. Hilbert her matematiksel dizgenin, tamde-

yimlerinin birbiriyle sonlu sayıda yapısal ilişki içinde olduğu geometrik tamdeyim örgüsüne benzer bir biçimde ortaya konabileceğine inanıyordu. Böylece bir dizgedeki deyimlerin yapısal özelliklerinin tamamını inceleyerek belirli bir dizgenin aksiyomlarından biçimsel olarak çelişik önermelerin çıkmayacağının gösterilebileceğini umuyordu. Özgün anlayışı içinde Hilbert programının önemli bir gerekliliği, tutarlılığın gösterilmesinin, tamdeyimlerin sonsuz sayıda yapısal özelliklerine veya tamdeyimlerle yapılacak sonsuz sayıdaki işlemlere başvurulmadan, yalnızca böyle bir işleyiş içinde yapılmasıydı. Bu işleyişler "sonlayıcı" [*finitistic*] olarak adlandırılırlar ve bu gerekliliği sağlayan tutarlılık kanıtlamasına "mutlak" adı verilir. Bir "mutlak" kanıtlama en az sayıda çıkarım ilkesi kullanarak hedefine ulaşır ve diğer aksiyom kümelerinin tutarlılığını varsaymaz. Sayılar kuramının biçimselleştirilmiş bir uyarlamasının tutarlılığının mutlak kanıtlanması, eğer böyle bir kanıtlama inşa edilebilirse, "0 = 0" ve onun biçimsel değillemesi "~(0 = 0)" (burada "~", "değil" anlamına geliyor) gibi iki çelişik önermenin çıkarım kurallarıyla aksiyomlardan (ya da ilksel tamdeyimlerden) türetilemeyeceğini sonlayıcı üst-matematiksel yöntemlerle gösterebilecektir.[3]

Bir kanıtlama kuralı olarak üst-matematiği, satranç kuramıyla karşılaştırmak açıklayıcılık açısından yararlı olabilir. Satranç 64 kareden oluşan kare biçimindeki bir satranç tahtasının üzerinde belirli kurallara göre hareket eden 32 taşla oynanır. Satranç, genellikle ne taşlara ne de taşların tahta içindeki çeşitli konumlarına hiçbir yorum getirilmeden oynanır. Elbette eğer istenirse taşları ve konumları yorumlayarak oynamak da olanaklıdır. Örneğin bir piyonun bir alayı, belirli bir karenin de bir coğrafi bölgeyi temsil ettiği koşulunu getirebiliriz. Ancak bu tür yorumlar pek alışılmış

---

3 Hilbert, hangi üst-matematiksel yöntemlerin sonlayıcı olarak sayılacakların kesin bir açıklamasını getirmemiştir. Tutarlılığın mutlak kanıtlanması hakkında kendi programının özgün halinde verilen gereklilikler, onun okulunun üyelerinin daha sonraki açıklamalarına göre daha sıkı ele alınmıştı.

değildir ve taşlar da, kareler de, taşların konumları da oyunun *dışındaki* hiçbir şeyi temsil etmezler. Bu anlamda, tahta üzerindeki taşlar ve onların karşılıklı ilişkilerinin anlamları yoktur. Bu bakımdan satranç oyunu biçimselleşmiş matematiksel hesapla benzeştir. Satranç tahtasının kareleri ve taşlar, hesabın basit imlerine karşılık gelmektedir; benzer biçimde taşların tahta üzerindeki kurallara uygun konumları, biçimsel dizgenin tamdeyimlerine; taşların tahta üzerindeki başlangıç konumları biçimsel dizgenin aksiyomlarına ya da ilk tamdeyimlerine; tahta üzerinde daha sonraki konumlar, aksiyomlardan çıkarımlanan tamdeyimlere (yani teoremlere) ve oyunun kuralları da biçimsel dizgenin çıkarım (ya da türetim) kurallarına karşılık gelmektedir. Koşutluk sürdürülebilir. Taşların tahta üzerindeki konumları biçimsel dizgenin tamdeyimleri gibi "anlam içermeseler" de, üst-matematiğin tamdeyimler hakkındaki önermeleri gibi, tahtadaki konumlar hakkındaki önermeler de yeterince anlamlıdır. Bir "üst-satranç" önermesi beyazların açılışta 20 farklı hamle yapabileceğini veya taşların belirli bir konumunda beyazın üç hamlede mat yapacağını öne sürebilir. Ayrıca tahta üzerindeki sonlu sayıda kurallara uygun konuma göre kanıtlanabilecek genel "üst-satranç" teoremleri oluşturulabilir. Beyazların olanaklı açılış hamleleri hakkındaki teorem bu yolla ortaya konabilir; ve bir şahı ve iki atı olan beyazın, bir tek şahı olan siyahı mat edemeyeceğine ilişkin üst-satranç teoremi de bu yolla kanıtlanabilir. Başka bir deyişle bu ve diğer "üst-satranç" teoremleri sonlayıcı usavurma yöntemleriyle kanıtlanabilirler, yani mevcut koşullar altındaki sonlu sayıda her konumun incelenmesiyle. Hilbert'in kanıtlama kuramının amacı da benzer biçimde bir matematiksel biçimsel hesaptan çelişik tamdeyimlerin çıkmayacağını sonlayıcı yöntemlerle göstermektir.

IV

Biçimsel Mantığın Dizgeselleştirilmesi

Gödel'in kanıtlamasını incelemeye başlamadan aşılması gereken iki köprü daha var. Whitehead ve Russell'ın *Principia Mathematica*'sının nasıl ortaya çıktığına değinmemiz gerekiyor; ayrıca bir tümdengelimli dizgenin biçimselleştirilmesinin kısa bir örneğini ele alıp (*Principia*'dan bir parça ele alınacak), onun mutlak tutarlılığının nasıl oluşturulduğunu açıklayacağız.

Her ne kadar matematiksel kanıtlamalar, kabul edilmiş mesleki kesinlik standartlarına uygun olarak yapılsalar da, bu konuda gözden kaçan önemli bir nokta vardır. Matematikçilerin çoğunlukla farkında olmadan kullandıkları çıkarım ilkeleri (ya da kuralları) açıkça formüle edilmezler. Örnek olarak, en büyük asal sayının (yalnızca 1'e ve kendine tam olarak bölünebilen sayı, asal bir sayıdır) olmadığına ilişkin Eukleides'in kanıtlamasını ele alalım. Uslamlama, *olmayana ergi yöntemiyle* [*reductio ad absurdum*] aşağıda olduğu gibidir:

Kanıtlanması istenenin aksine en büyük asal sayının olduğunu varsayalım ve bunu n ile gösterelim. Böylece:

1. n en büyük asal sayıdır.

2. n'ye eşit veya küçük olan tüm asal sayıların çarpımlarını alalım ve buna 1 ekleyelim. Bu işlem yeni bir y sayısını vermektedir, yani y =

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots\ldots \times n) + 1$$

3. Eğer y'nin kendisi bir asal sayıysa, n en büyük asal sayı olamaz; çünkü y gayet açıklıkla n'den büyüktür.

4. Eğer y bölünebilir (yani asal olmayan) bir sayıysa, n yine de en büyük asal değildir; çünkü y bölünebilir olduğundan z diye gösterilen bir asal böleni olması gerekir; üstelik

z, 2, 3.......*n* gibi tüm asal sayılardan farklı olmalıdır; yani *z*, *n*'den daha büyük bir asal sayı olmalıdır.

5. Ancak *y* ya asaldır ya da bölünebilir.
6. Demek ki *n* en büyük asal sayı değildir.
7. En büyük asal sayı yoktur.

Bu kanıtlamanın yalnızca ana çizgilerini verdik. Ancak bu kanıtlamanın tüm basamakları dikkate alındığında önemli sayıda üstü örtük çıkarım kurallarının ve mantık ilkelerinin kullanıldığı gösterilebilir. Bunlardan bazıları biçimsel mantığın başlangıç kısımlarına, diğerleri daha ileri kısımlarına aittir; örneğin, kurallar ve teoremler "niceleme kuramı"nın içinde yer almaktadırlar. Bu kuram "tüm", "bazı" vb. niceleyicileri içeren önermelerin ilişkileriyle ilgilenmektedir. Şimdi basit bir mantık teoremini ve bir çıkarım kuralını gözler önüne sereceğiz ki, bunlardan her biri bir kanıtlamada gerekli ancak anılmayan, açıkça belirtilmeyen ilke ve kurallardır.

Yukarıdaki kanıtlamanın 5. maddesine bakalım. Bu yargının kaynağı nedir? Sorunun yanıtı aşağıdaki mantık teoremi ile (ya da zorunlu doğrulukla) verilebilir: "Ya *p*'dir ya da değil-*p*'dir" burada '*p*' önerme değişkenidir. Fakat 5. maddeyi bu teoremle nasıl elde ediyoruz? Yanıtı: '"Önerme değişkenleri için yerine koyma kuralı" olarak bilinen çıkarım kuralını kullanarak' olacaktır. Bu kurala göre bir önerme, böyle değişkenleri içeren başka bir önerme tarafından farklı bir değişkenin her geçişinde (burada '*p*' değişkeni) herhangi bir önermeyi (burada '*y* asal sayıdır' önermesi) onun yerine koyarak türetilebilir. Bu kurallar ve mantıksal teoremler söylediğimiz gibi hemen her zaman kullanılmakla birlikte, genelde bu kullanım bilinçli değildir ve çalışmalar göstermiştir ki, Eukleides'inki gibi görece basit kanıtlamalar bile ancak son yüzyılda geliştirilen mantıksal kuramı gerektirmektedir.[1] Bir ömür boyu bilmeden nesir konuşan

[1] Kanıtlamanın 6. ve 7. basamaklarına geçişi sağlayan çıkarım kurallarının ve mantıksal teoremlerin ayrıntılı bir tartışması için okuyucu *Ek Notlar 2*'ye bakabilir.

Molière'in Mr. Jourdain'i gibi, matematikçiler de iki bin yıl boyunca usavurmalarının temelinde yatan tüm ilkelerin farkında olmadan çalışmalarını sürdürdüler. Çalışmalarında kullandıkları araçların gerçek doğası ancak son zamanlarda açıkça ortaya çıktı.

Yaklaşık 2000 yıl boyunca Aristoteles'in geçerli tümdengelimli biçimlere ilişkin dizgesel çalışması, genellikle tam ve önemli bir katkının yapılamayacağı bir çalışma olarak görüldü. Alman filozof Immanuel Kant, 1787'de Aristoteles'in biçimsel mantığından bu yana "onu geliştirmek yönünde bir tek adım bile atılamadığını ve tümüyle kapalı ve tamamlanmış bir öğreti olduğunu" söylemekteydi. Gerçekte geleneksel mantığın ciddi yetersizlikleri vardı; çok basit matematik uslamlamalarda kullanılan birçok çıkarım ilkesinin bile hesabının verilmesinde geleneksel mantık yetersiz kalıyordu.[2] Modern çağın mantıksal çalışmalarının rönesansı, George Boole'un 1847'de yayımlanan *Mantığın Matematiksel Çözümlemesi* adlı kitabıyla başladı. Boole'un ve izleyicilerinin temel ilgi odağı, geleneksel mantık ilkelerinin kapsadıklarından daha genel ve daha geniş tümdengelim türleriyle uğraşmaya olanak verecek bir mantık cebri geliştirmekti. Varsayalım ki bir okuldan onur derecesiyle mezun olan öğrencilerden erkekler matematikte çoğunluğu oluşturmaktalar ve kızlar bu konuda çoğunlukta değiller. Bu durumda, sözü edilen diğer sınıflardaki öğrenciler göz önüne alındığında matematik sınıfının çoğunluğu nasıl oluşmaktadır? Eğer yalnızca geleneksel mantığın araçlarını kullanıyorsak, bu sorunun yanıtını vermek kolay değildir. Ancak, matematik sınıfının çoğunluğunun onur derecesiyle mezun olan erkeklerden ve onur derecesiyle mezun olmamış kızlardan oluştuğunu Boole cebrinin yardımıyla kolaylıkla gösterebiliriz.

On dokuzuncu yüzyıl matematikçilerinin matematiksel analizin temellerine ilişkin çalışmalarıyla çok yakından bağıntılı diğer bir araştırma alanı, Boole'un programıyla yakın ilişki içindeydi. Bu yeni gelişme arı matematiğin biçimsel

---

2 Örneğin çıkarımda kullanılan ilke şudur: 5, 3'ten büyüktür, öyleyse 5'in karesi de 3'ün karesinden büyüktür.

Tüm beyefendiler kibardır.
Hiçbir banker kibar değildir.
Hiçbir beyefendi banker değildir.

$g \subset k$
$b \subset \bar{k}$
$\therefore\ g \subset \bar{b}$

$g\bar{k} = 0$
$bk = 0$

$gb = 0$

Simgesel mantık on dokuzuncu yüzyılın ortalarında İngiliz matematikçi G. Boole tarafından icat edildi. Yukarıdaki gösterimde bir tasım Boole'un notasyonuna göre iki farklı biçimde ifade edilmiştir. Yukarıda ki gruptaki '⊂' simgesi '...nin içindedir' anlamındadır. Demek ki 'g ⊂ k' beyefendiler sınıfının, kibar insanlar sınıfının içinde bulunduğunu söylemektedir. Alttaki sınıfta da yan yana iki harf her iki özelliğe de sahip nesneler kümesini göstermektedir. Örneğin, 'bk' hem banker hem de kibar bireyler sınıfını göstermektedir. 'bk = 0' denklemi de bu sınıfın hiçbir üyesinin olmadığını göstermektedir. Harfin üzerindeki çizgi, "değil" anlamına gelmektedir (Örneğin, 'k̄' "kibar olmayan" anlamındadır.)

Çizelge1.

mantığın bir bölümü olduğunu ortaya koymayı amaçlıyordu ve Whitehead'le Russell'ın 1910'da yayımlanan *Principia Mathematica*'sıyla somutlaştı. On dokuzuncu yüzyıl matematikçileri, cebri "aritmetikleştirmeyi" ve "sonsuz küçükler hesabı" adı verilen matematiksel analizdeki birçok kavramın sayı-kuramsal terimlerle açık biçimde tanımlanabileceğini göstermeyi başarmışlardı (yani, tamsayılar ve tamsayılarla yapılabilen aritmetiksel işlemler aracılığıyla). Örneğin, gizemli bir "varlık" gibi görünen $\sqrt{-1}$ sanal sayısı, üzerinde 'toplama' ve 'çarpma' işlemlerinin yapılabileceği bir (0,1) tamsayı sıralı ikilisi olarak tanımlandı. Benzer biçimde, $\sqrt{2}$ oransız [irrasyonel] sayısı belirli bir oranlı [rasyonel] sayılar kümesi olarak, yani kareleri 2'den küçük olan oranlı sayılar

kümesi olarak tanımlandı. Russell'ın (ondan önce de Alman matematikçi Gottlob Frege'nin) göstermeye çalıştığı, *tüm sayı-kuramsal kavramların* arı mantıksal fikirlerle tanımlanabileceği idi; böylece sayılar kuramının aksiyomları, tamamı arı mantıksal doğruluklar olarak onaylanan az sayıda temel önermeden çıkarımlanmış olacaklardı.

Örneklemek gerekirse: Küme kavramı genel mantığa ait bir kavramdır. İki küme, eğer öğeleri arasında bire-bir karşılıklılık [*one-to-one correspondence*] kurulabiliyorsa, 'benzer' olarak tanımlanır. Karşılıklılık kavramı diğer mantıksal fikirlerden elde edilebilir. Tek öğesi olan bir kümeye 'birim küme' denir (yani dünyanın uydularının kümesi); böylece 1 sayal [*cardinal*] sayısı, birim kümeye 'benzer' tüm kümelerin kümesi olarak tanımlanır. Diğer sayal sayılar içinde benzer tanımlar verilebilir; böylelikle de toplama, çarpma gibi çeşitli aritmetiksel işlemler biçimsel mantık kavramıyla tanımlanabilir. Bir aritmetiksel önerme, örneğin '1 + 1 = 2' yalnızca genel mantığa ait deyimleri içeren bir önerme biçimine çevrilebilir ve bu tür arı mantıksal bir önermenin bazı mantıksal aksiyomlardan çıkarımlanabileceği gösterilebilir.

Böylece *Principia Mathematica*, matematiksel dizgelerin ve özelde sayılar kuramının tutarlılık sorununu, biçimsel mantığın tutarlılık sorununa indirgeyerek soruna nihai bir çözüm bulunduğu savıyla ortaya çıktı; çünkü eğer sayılar kuramının aksiyomları, mantık teoremlerinin basit bir çevriminden [*transcription*] ibaret ise, aksiyomların tutarlı olup olmadıkları sorusu, mantığın temel aksiyomlarının tutarlı olup olmadıkları sorusuyla eşdeğerdir.

Matematiğin, mantığın yalnızca bir bölümü olduğuna ilişkin Frege-Russell savı, birçok ayrıntılı sebepten ötürü, matematikçiler arasında evrensel bir kabul görmedi. Üstelik daha önce değinildiği gibi, Cantorcu sonsuzötesi [*transfinite*] sayılar kuramındaki mantıksal çatışkılar [antinomiler], bunları önleyecek özel önlemler alınmadığı sürece mantığın içinde de ortaya çıkabilirdi. Ancak çatışkıları önlemek için *Principia Mathematica*'da alınan önlemler, acaba kendiyle çelişik tüm önermeleri dizgeden dışlamak olanağı veriyor muydu? Elbette bu öne sürülemezdi. Bu durumda Frege-

Russell'ın savıyla aritmetiğin mantığa indirgenmesi tutarlılık sorununa nihai bir yanıt sağlamıyordu; aslında sorun yalnızca daha genel bir biçimde ortaya çıkıyordu. Yine de Frege-Russell savının geçerliliği ne olursa olsun, *Principia Mathematica*'nın iki özelliği tutarlılık sorununda daha sonraki çalışmalar açısından çok değerli bir yer tuttu. *Principia Mathematica*, tüm arı matematiksel önermelerin (ve özelde de sayılar kuramının) kabul edilebilir bir biçimde bir araya toplanmasına olanak veren oldukça anlaşılır bir simgeleştirme (notasyon) sağladı. Ayrıca matematiksel kanıtlamada kullanılan birçok biçimsel çıkarım kuralını belirtik kıldı (sonunda bu kurallar daha kesin ve tamamlanmış oldular). Sonuç olarak, *Principia Mathematica* tüm sayılar kuramı dizgesini yorumlanmamış bir simgeler dizgesi olarak (yani tamdeyimleri belirli kurallara göre bir araya gelen ve dönüşen içeriksiz imler dizgesi olarak) araştırabilmenin asıl aracını yaratmış oldu.

Tarihsel önemi açısından *Principia Mathematica* bu kitap boyunca biçimselleştirilmiş sayılar kuramı için bizim prototip örneğimizi oluşturacaktır; ve Gödel'in makalesinde yer alan "*und verwandter Systeme*" (ve Benzeri Dizgelerin) ifadesi de, *Principia Mathematica*'dan her söz edişimizde örtük olarak içerilmiş olacaktır, yani bu tür tüm dizgeler ailesi kastedilmiş olacaktır.

V

Tutarlılığın Mutlak Kanıtlamasına Başarılı Bir Örnek

Şimdi önceki bölümün başında sözünü ettiğimiz ikinci köprüyü, kolaylıkla anlaşılabilir olmakla birlikte çok önemli bir mutlak tutarlılık kanıtlanması örneği sayesinde aşmaya girişmeliyiz. Bu kanıtlamanın anlaşılmasıyla, okur Gödel'in 1931 makalesinin anlamını daha iyi değerlendirebilecektir.

Principia Mathematica'nın küçük bir kesiminin, temel mantık önermelerinin, nasıl biçimselleştirildiklerinin bir özetini vereceğiz. Bu dizgenin bir parçasının yorumlanmamış imlere dönüştürülmesini gerektirmektedir. Böylece mutlak bir tutarlılık kanıtlamasını geliştirmiş olacağız.

Biçimselleştirme dört basamakta gerçeklenir. İlkin dizgede kullanılacak imlerin tamamının listesi hazırlanır. Bunlar dizgenin sözcük dağarcığıdır. İkinci olarak "Oluşum Kuralları" belirlenir. Bu kurallar sözcük dağarcığındaki imlerin hangi yan yana gelişlerinin tamdeyim [formül] olarak kabul edilebilir olduğunu belirler. Bu kurallar dizgenin dilbilgisini [gramer] oluşturan kurallar olarak da görülebilir. Üçüncü olarak, "Dönüşüm Kuralları" ifade edilir. Bunlar eldeki yapının diğer tamdeyimlerinin türetildiği tamdeyimlerin tam yapısını betimlemektedir. Bu kurallar, aslında çıkarım kurallarıdır. Son basamakta da bazı tamdeyimler, aksiyom (ya da ilksel tamdeyim) olarak seçilir. Bu aksiyomlar tüm dizgenin temellerini oluştururlar. Dönüşüm kurallarının kullanılmasıyla aksiyomlardan türetilen tamdeyimleri "dizgenin teoremleri" olarak adlandıracağız. Biçimsel kanıtlamayla da, her biri ya aksiyom ya da Dönüşüm Kuralları aracılığıyla diğer tamdeyimlerden türetilmiş bir dizi sonlu tamdeyimi anlıyoruz.[1]

---

[1] Buradan aksiyomların da teoremler arasında sayılması gerektiği

Önermeler mantığı için söz dağarcığı (veya "temel imler" listesi) oldukça basittir. Değişken ve değişmez imlerden oluşur. Değişkenler önermeleri temsil ediyorlarsa, bunlara önerme değişkenleri denir. Bunlar

'*p*', '*q*', '*r*' vb.

harflerdir. Değişmez imler ise, ya önerme eklemleri ya da noktalama imleridir. Önerme eklemleri:

'~' 'değil'in,
'v' 'veya'nın,
'→' 'eğer..... demek ki......'nin,
'.' 've'nin kısaltılmışıdır.

Noktalama imleri de sol ayraç '(' ve sağ ayraç ')'tır.

Oluşum Kuralları, temel imlerin önerme biçiminde bir araya gelmelerini sağlayacak biçimde tasarlanmıştır; bunlara tamdeyim denir. Ayrıca her önerme değişkeni de tamdeyim sayılır. Buna ek olarak, eğer "S" harfi bir tamdeyimi gösteriyorsa, onun biçimsel değillemesi olan "~S" de bir tamdeyimdir. Benzer biçimde eğer S_1 ve S_2 birer tamdeyimse, $(S_1) \vee (S_2)$, $(S_1) \rightarrow (S_2)$ ve $(S_1) \cdot (S_2)$ de tamdeyimdirler. Şunlardan her biri de bir tamdeyimdir: '*p*'; '~(*p*)'; '(*p*) → (*q*)'; '((*q*) v (*r*)) → (*p*)'. Ancak ne '(*p*) (~(*q*))' ne de '((*p*) → (*q*)) v' birer tamdeyimdir: İlki değildir, çünkü hem '(*p*)', hem de '(~(*q*))', tek başlarına birer tamdeyim oldukları halde, bu yazılışta aralarında eklem yoktur; ikincisi de tamdeyim değildir, çünkü 'v' eklemi kuralların gerektirdiği gibi sağdan ve soldan birer tamdeyimle kuşatılmamıştır.[2]

İki Dönüşüm Kuralı kabul edilmiştir. Bunlardan biri, *Yerine Geçme Kuralı* (önerme değişkenleri için), bir tamdeyimde

---

sonucu çıkıyor.

[2] Karışıklık olasılığının olmadığı yerlerde noktalama işaretleri (yani ayraçlar) kullanılmayabilir. Böylece '~(*p*)' yerine '~*p*' ve '(*p*) → (*q*)' yerine basitçe '*p* → *q*' yazılabilir. (Dizgenin biçimselliğindeki görünüşteki bu gevşeme, kurallara tam bir bağlılık konusunda atılmış bir geri adım değildir, çünkü gerekli olmayan ayraçların temizlenmesi tümüyle mekanik bir işleyişle yerine getirilebilir.)

geçen önerme değişkenleri yerine başka önerme değişkenleri koyarak bu tamdeyimden başka bir tamdeyim türetilmesine olanak vermektedir. Bu kural gereği, bir tamdeyimdeki bir değişkenin yerine başka bir değişken konulmuş ise, ilk değişkenin her geçişinde aynı yerine koyma yapılmalıdır. Örneğin, '$p \rightarrow p$'nin sağlandığını varsayarak 'p' değişkeninin yerine 'q'yu koyarak '$q \rightarrow q$' tamdeyimini elde ederiz veya 'p' yerine 'p ∨ q' tamdeyimini koyarak, '$(p \vee q) \rightarrow (p \vee q)$'yu elde ederiz. Ya da '$p$' yerine günlük dilden tümceler koyarsak '$p \rightarrow p$'den şunları elde edebiliriz: 'Kurbağalar Gürültücüdür → Kurbağalar Gürültücüdür'; '(Yarasalar Kördür ∨ Yarasalar Fare Yer) → (Yarasalar Kördür ∨ Yarasalar Fare Yer)'.[3] İkinci Dönüşüm Kuralı *Ayırma Kuralı*dır (veya *Modus Ponens*). Bu kural, S_1 ve $S_1 \rightarrow S_2$ biçimine sahip iki tamdeyimden, her zaman S_2 tamdeyiminin çıkarımlanmasına izin verildiğini söylemektedir. Örneğin, '$p \vee \sim p$' ve '$(p \vee \sim p) \rightarrow (p \rightarrow p)$' gibi iki tamdeyimden '$p \rightarrow p$'yi çıkarımlayabiliriz.

Aşağıdaki dört tamdeyim, biçimsel dizgenin aksiyomlarıdır (esas olarak bunlar *Principia*'nın aksiyomlarıdır):

1. $(p \vee p) \rightarrow p$ veya sözsel olarak, eğer p veya p ise demek ki p'dir.	1. Eğer (VIII. Henry kaba ise veya VIII. Henry kaba ise demek ki VIII. Henry kabadır.)
2. $p \rightarrow (p \vee q)$, yani eğer p ise demek ki ya p'dir veya q'dur	2. Eğer psikanaliz modaya uygunsa demek ki –(ya psikanaliz modaya uygundur veya başağrısı hapları çok ucuzdur).

---

[3] Öte yandan, '$(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$' tamdeyiminin sağlanmış olduğunu varsayalım ve 'p'nin yerine 'r'yi, 'q'nun yerine de '$p \rightarrow r$'yi koymayı kararlaştırdığımızı düşünelim. Ancak bu yerine koymayla, '$(r \rightarrow (p \rightarrow r)) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim r)$' tamdeyimini elde edemeyiz, çünkü 'q'nun her geçişinde aynı "yerine koyma"yı uygulamadık. Doğru yerine koyma şu tamdeyimi verecektir: '$(r \rightarrow (p \rightarrow r)) \rightarrow (\sim(p \rightarrow r) \rightarrow \sim r)$'.

3. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$, yani *p* veya *q* ise demek ki *q* veya *p*'dir.

3. Eğer (Immanuel Kant dakik ise veya Hollywood günahkârsa) demek ki (Hollywood günahkârdır veya Immanuel Kant dakiktir).

4. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \vee p) \rightarrow (r \vee q))$, yani, eğer (eğer *p* ise demek ki *q*) demek ki (eğer (*r* veya *p* ise) demek ki (*r* veya *q*)'dur).

4. Eğer (eğer ördekler paytak yürüyorlarsa demek ki 5 bir asal sayıdır) demek ki (eğer (Churchill brendi içiyor veya ördekler paytak yürüyorlarsa) demek ki (Churchill brendi içiyor. veya 5 asal bir sayıdır)).

Sol sütunda aksiyomları ve nasıl ifade edildiklerini belirttik. Sağ sütunda ise her aksiyoma bir örnek verdik. Aksiyomların sözcüklerle ifadelerindeki hantallık (özellikle son aksiyomda), biçimsel mantıkta özel simgeleştirme kullanılmasının yararı hakkında okuyucuya bir fikir verecektir. Sağ sütunda, aksiyomların yerine konulan anlam içermeyen deyimlerin ve koşullu tümcelerde, öncüllerle sonuçları arasında hiçbir anlamlı ilişki olmamasının, örneklerdeki mantıksal bağların geçerliliğini hiçbir biçimde etkilemediğini görmek ayrıca önemlidir.

Bu aksiyomlardan her biri 'apaçık' ve basit görünebilir. Bununla birlikte, bu aksiyomlarda anılan Dönüşüm Kurallarıyla hiç de apaçık ya da basit olmayan çok büyük sayıda teorem sınıfı türetebilmek olanaklıdır. Örneğin,

$$`((p \rightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow s) \rightarrow t)) \rightarrow ((u \rightarrow ((r \rightarrow s) \rightarrow t)) \rightarrow ((p \rightarrow u) \rightarrow (s \rightarrow t)))'$$

tamdeyimi bir teorem olarak türetebilir. Aslında aksiyomlardan teorem türetmekle henüz ilgilenmedik. Amacımız bu aksiyom kümesinin çelişik olmadığını, yani Dönüşüm Kuralları kullanarak hem S hem de onun biçimsel değillemesi

'~S'nin aksiyomlardan türetilebilmesinin *olanaksız* olduğunu göstermek.

Şimdi, '$p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$' (sözcüklerle ifade edecek olursak: Eğer p ise, demek ki değil-*p* ise *q*'dur.) biçimsel hesabın içinde bir teoremdir. (Bunun teorem olduğunu, türetilmesinin gösterimini vermeden kabul edeceğiz.) Daha sonra varsayalım ki, hem S hem de çelişiği ~S aksiyomlardan çıkarımlanabilir olsun. '*p*'nin yerine S'yi koyarak (Yerine Koyma Kuralı ile) ve Ayırma Kuralını iki kez uygulayarak '*q*' tamdeyim çıkarımlanabilecektir.[4] Ancak, '*q*' değişkeninden oluşan tamdeyim gösterilebilir ise, bundan, '*q*'nun yerine ne koyarsak koyalım, *q*'nun yerine konulacak *her tamdeyimin aksiyomlardan çıkarımlanabildiği* sonucu çıkar. Yani şurası açıktır ki, eğer hem S tamdeyimi hem de onun çelişiği ~S aksiyomlardan çıkarımlanabiliyorsa, her tamdeyim de çıkarımlanabilecek demektir. Kısaca, eğer biçimsel dizge [hesap] tutarlı değilse, her tamdeyim bir teoremdir; şöyle de söylenebilir: Çelişik aksiyomlar kümesinden her tamdeyim türetilebilir. Bunun bir de tersi var; yani eğer her tamdeyim bir teorem değilse (yani aksiyomlardan türetilemeyecek en az bir tamdeyim varsa), bu durumda biçimsel hesap tutarlıdır. *Demek ki hedef, aksiyomlardan türetilemeyecek en az bir tamdeyim olduğunu göstermektir.*

Bunu yapmanın yolu üst-matematiksel usavurmayı daha önceki dizgeler üzerinde kullanmaktadır. İzlenecek yol zariftir. Tamdeyimlerin aşağıdaki üç koşulu sağlayan belirleyici ya da yapısal özelliklerinin saptanmasından ibarettir. (1) Özellik dört aksiyomda da ortak olmalıdır. (Bu özelliklerden biri, 25 temel imden fazlasını içermemek olabilir; bununla birlikte bu özellik sonraki koşulu sağlamamaktadır.) (2) Özellik, Dönüşüm Kuralına göre "kalıtımsal" olmalıdır, yani eğer bu özellik tüm aksiyomlarda var ise, bu aksiyomlardan

---

[4] '*p*'nin yerine S'yi koyarak önce $S \rightarrow (\sim S \rightarrow q)$ tamdeyimini elde ediyoruz. Bununla ve kanıtlanabilir olduğu varsayılan S ile Ayırma Kuralını kullanarak $\sim S \rightarrow q$ tamdeyimini elde ediyoruz. Sonuçta ~S'nin kanıtlanabilir olduğu varsayıldığından Ayırma Kuralını bir kez daha kullanarak *q*'yu elde ediyoruz.

Dönüşüm Kuralıyla türetilecek her tamdeyimde bu özelliğin bulunması gerekir. Tanımca türetilen her tamdeyimin bir teorem olması gerektiğinden, bu koşul her teoremin bu özelliğe sahip olması gerektiği koşulunu getirmektedir. (3) Özellik, dizgenin Oluşum Kurallarıyla uyumlu olarak inşa edilen her bir tamdeyimine ait olmamalıdır, yani özelliğe sahip olmayan en az bir tamdeyimi bulmaya çalışmalıyız. Eğer bu üçlü hedefi yerine getirebilirsek tutarlılığın mutlak kanıtlanmasına ulaşmış oluruz. Usavurma aşağı yukarı şöyle ilerlemektedir: Kalıtımsal özellik aksiyomlardan tüm teoremlere geçer; ama bir imler topluluğu dizgenin bir tamdeyim olma koşullarına sahip olsa bile, eğer bu tamdeyim belirlenmiş kalıtımsal özelliği taşımıyorsa, bu bir teorem olamaz. (Başka biçimde söylersek, beklenen çocuk (tamdeyim), atalarının (aksiyomların) kalıtımsal izlerini hiçbir biçimde taşımıyorsa onların soyundan gelmiş olamaz (teorem)). Ancak, eğer bir tamdeyimin bir teorem olmadığını bulmuşsak, dizgenin tutarlılığını da göstermiş oluruz; çünkü yukarıda söylediğimiz gibi, eğer bir dizge tutarlı *değil* ise, *her* tamdeyim aksiyomlardan türetilebilirdi (yani her tamdeyim teorem olacaktı). Kısaca işin özü, kalıtımsal özellik taşımayan bir tek tamdeyimin saptanmasında yatmaktadır.

Amacımıza uygun bir özellik belirleyelim. Seçtiğimiz özellik totoloji özelliği olsun. Günlük dilde, bir ifade eğer gereksiz bir fazlalık taşıyorsa ve aynı şey iki farklı biçimde söyleniyorsa –örneğin "Ali Veli'nin babasıdır ve Veli Ali'nin oğludur" gibi– totolojiktir. Bununla birlikte, totoloji, mantıkta, hiçbir mantıksal olanağı dışarıda bırakmayan önerme olarak tanımlanır, (örneğin "yağmur ya yağıyordur ya da yağmıyordur"). Bunu başka bir biçimde söylemenin yolu, bir totolojinin "tüm olanaklı dünyalarda doğru olduğunu" söylemektir. Hiç kimse mevcut hava durumuna bakmaya gerek duymadan (yani 'yağmur yağıyor' önermesinin doğru olup olmadığına bakmadan), "yağmur yağıyordur ya da yağmıyordur" önermesinin *zorunlu olarak doğru* olduğundan kuşku duymayacaktır.

"Zorunlu doğruluk" kavramını dizgemizde bir totolojiyi tanımlamak için kullanıyoruz. İlkin, her tamdeyimin '*p*', '*q*',

'*r*' vb. gibi temel öğelerle inşa edilmiş olduğuna dikkat edelim. Bir tamdeyim, onu oluşturan temel öğelerin doğru olup olmadıklarına bakılmaksızın değişmez bir biçimde doğru ise, o tamdeyim bir totolojidir. Nitekim, birinci aksiyomda '$(p \vee p) \rightarrow p$' tek temel öğe '*p*'dir; ama '*p*'nin doğruluğunun ya da yanlışlığının varsayılmış olması durumu değiştirmemektedir, birinci aksiyom her iki durumda da doğrudur. Eğer '*p*'nin yerine "Everest Dağı'nın yüksekliği 8882 m.'dir" önermesini koyarsak konuyu açık kılabiliriz; böylece birinci aksiyomun bir örneğini de elde etmiş oluyoruz: "Everest Dağı'nın yüksekliği 8882 m.'dir veya Everest Dağı'nın yüksekliği 8882 m.'dir ise Everest Dağı'nın yüksekliği 8882 m.'dir". Okur "Everest Dağı'nın yüksekliği 8882 m.'dir" önermesinin doğru olup olmadığını bilmese de yukarıdaki uzun önermenin doğru olduğunu anlamakta hiç zorlanmayacaktır. Öyleyse birinci aksiyom açıkça bir totolojidir, "tüm olanaklı dünyalarda doğrudur". Diğer aksiyomların da totoloji oldukları kolaylıkla gösterilebilir.

Şimdi, totoloji olma özelliğinin kalıtımsal olduğu Dönüşüm Kuralı içinde gösterilebilir. Biz bunun gösterimini vermeyeceğiz (Bkz. *Ek Notlar 3*). Bundan çıkan sonuç, aksiyomlardan gerektiği gibi türetilen her tamdeyimin (yani her teoremin) bir totoloji olması gerektiğidir.

Totoloji özelliğinin daha önce anılan üç koşuldan ikisini yerine getirdiğini gördük, şimdi üçüncü basamağa geldik. Şimdi, öyle bir tamdeyim arayacağız ki, dizgeye ait olduğu halde (yani Oluşum Kuralına uygun bir biçimde sözcük dağarcığındaki imlerle kurulmuş bir tamdeyim olduğu halde), totoloji olma özelliğine sahip olmasın; yani bir teorem olamasın (aksiyomlardan türetilemesin). Böyle bir tamdeyimi çok fazla aramaya gerek yok; kolaylıkla bulabileceğimiz bir şey bu. Örneğin, '$p \vee q$' buna uymaktadır. Kendini bir 'kaz yavrusu' gibi göstermekle birlikte, aslında bir ördek yavrusudur; aileye ait değildir: Bir *tamdeyimdir*, ama bir *teorem değildir*. Açıkça bir totoloji değildir. Herhangi bir yerine koyma (ya da yorumlama) örneği bunu açıkça göstermektedir. '$p \vee q$'deki değişkenlerin yerine "Napoleon kanserden öldü veya Bismarck kahve içti" önermesini koyabiliriz. Bu bir

mantık doğruluğu değildir, çünkü her iki önerme de yanlış ise bütün önerme de yanlış olacaktır; ve eğer bu doğru bir önermeyse, onu oluşturan önermelerin doğruluğundan ya da yanlışlığından bağımsız bir doğruluğa sahip değildir (Bkz. *Ek Notlar 3*).

Hedefimize ulaşmış bulunuyoruz. Teorem olmayan en az bir tamdeyim bulmuş olduk. Eğer aksiyomlar çelişik olsaydı böyle bir tamdeyim bulamazdık. Sonuç olarak önermeler mantığı aksiyomlarından, herhangi bir tamdeyimin hem kendisini hem de onun değilini birlikte türetebilme olanağı yoktur. Kısaca dizgenin tutarlılığının mutlak kanıtlanmasını ortaya koymuş bulunuyoruz.[5]

Önermeler mantığı ile ilgili sözü bitirmeden önce bir noktaya daha değineceğiz. Bu biçimsel dizgenin [hesabın] her teoremi bir totoloji olduğundan, bir mantık doğruluğu olduğundan, biçimsel hesabın sözcük dağarcığı içinde ifade edilen her mantıksal doğruluğun da (yani her totolojinin) aynı zamanda bir teorem (yani aksiyomlardan türetilebilir) olup olmadığını sormak doğaldır. Bunun kanıtlanması burada ifade edilemeyecek kadar uzun olsa da, sorunun yanıtı evettir. Zaten bizim ilgilendiğimiz nokta da kanıtlamayla ilgili olarak sağlayacağımız bilgiyle bağıntılı değildir. Bu sonucun ışığında ulaştığımız nokta, aksiyomların, dizgede ifade edilebilen her totolojik tamdeyimi, her mantıksal doğruluğu üretmeye yeterli olduğudur. Bunu sağlayan aksiyomlar "tam"dırlar (eksiksizdirler).

Bir aksiyomatik dizgenin tamlığa sahip olup olmadığını

---

[5] Okur dizinin aşağıdaki özetlemesini yararlı bulabilir:

1- Dizgenin her aksiyomu bir totolojidir.
2- Totolojik olma kalıtımsal bir özelliktir.
3- Aksiyomlardan uygun biçimde türetilen her tamdeyim (yani teorem) aynı zamanda bir totolojidir.
4- Dolayısıyla totoloji olmayan bir tamdeyim, bir teorem değildir.
5- Totoloji olmayan bir tamdeyim (yani '$p \vee q$') bulunmuştur.
6- Demek ki, bu tamdeyim bir teorem değildir.
7- Ancak, eğer aksiyomlar tutarsız olsalardı, her tamdeyim bir teorem olacaktı.
8- Demek ki , aksiyomlar tutarlıdırlar.

belirlemek son derece önemlidir. Gerçekte çeşitli matematik dallarının aksiyomlaştırılmasına yön veren fikir, bir araştırma alanındaki tüm doğru önermeleri oluşturulmuş bir temel varsayımlar kümesinden çıkarımlamak arzusudur. Öyle anlaşılıyor ki, Eukleides temel geometriyi aksiyomlaştırırken, aksiyomlarını, tüm geometrik doğruları onlardan türetebilecek biçimde seçmişti; yani şimdiye kadar bulunmuş olanlar kadar, gelecekte bulunabilecek olanları da kapsayacak biçimde.[6] Yakın zamana kadar, herhangi bir matematik dalının, tamlığı olan bir aksiyom kümesine sahip olmasına gayet doğal bir şey olarak bakılıyordu. Özellikle matematikçiler sayılar kuramı için geçmişte önerilen aksiyomlar kümesinin tam olduğuna inanıyorlardı, ya da en azından daha önceki aksiyomlar kümesine sonlu sayıda yeni aksiyomlar ekleyerek onu tam yapabileceklerini düşünüyorlardı. Bunun yapılamayacağının keşfi Gödel'in başat vargılarından birisidir.

---

[6] Eukleides, ünlü paralel aksiyomunu diğer aksiyomlardan mantıkça bağımsız olarak ele alırken, olağanüstü bir önseziyle davranmıştı. Çünkü daha sonra kanıtlandığı gibi bu aksiyom diğerlerinden türetilemiyordu, bu durumda paralel aksiyomu olmadan aksiyom kümesi tam olmayacaktı.

VI

Eşleme [Haritalama] Fikri ve Matematikteki Kullanımı

Önermeler mantığı, Hilbert'in kanıtlama kuramının hedeflerinin tümüyle gerçekleştiği bir matematiksel dizgeye verilebilecek bir örnektir. Aslında önermeler mantığı, biçimsel mantığın yalnızca bir kısmını dizgeselleştiriyordu; bu hesabın söz dağarı ve biçimsel gereçleri temel aritmetiği bile geliştirmeye yetmiyordu. Bununla birlikte Hilbert'in programı bu ölçüde de sınırlı değildir. Daha kapsamlı dizgelere başarıyla uygulanabilir ve bu dizgelerin hem tutarlılığı hem de tamlığı üst-matematiksel usavurmalarla gösterilebilir. Toplama işleminin aksiyomlarını içeren, ama çarpmanın aksiyomlarını içermeyen bir biçimsel dizgenin tutarlılığının mutlak kanıtlanması buna örnek olarak verilebilir. Ancak, acaba Hilbert'in sonlayıcı yöntemi, söz dağarı ve mantıksal gereçleri sayılar kuramının bir kısmı yerine tümünü ifade etmek için yeterli olan acaba *Principia* gibi bir dizgenin tutarlılığını kanıtlayacak ölçüde yeterince güçlü müdür? Böyle bir kanıtlamayı inşa etmek yolundaki birçok girişim başarısızlıkla son bulmuştu; sonuçta, Gödel'in 1931'de yayınlanan makalesi, Hilbert'in özgün programının sınırları içinde kalan tüm girişimlerin başarısızlığa uğramaya mahkûm olduklarını göstermişti.

Gödel'in yaptığı neydi ve ulaştığı sonucu nasıl kanıtlamıştı? Gödel'in ulaştığı sonuç iki yönlüdür. İlkin (her ne kadar bu sıra Gödel'in uslamlamasının kendi sırası olmasa da), tüm aritmetiği kapsayacak ölçüde kapsamlı bir dizgenin (*Principia Mathematica* gibi) tutarlılığının üst-matematiksel bir kanıtlamasını vermenin olanaksız olduğunu göstermiştir –bu kanıtlamada kullanılan Dönüşüm Kurallarının, dizgenin *içindeki* teoremleri türetmekte kullanılanlardan esas

itibariyle farklı olmaması koşuluyla. Böyle bir kanıtlama, kuşkusuz, çok büyük bir önem ve değere sahiptir. Bununla birlikte, bu kanıtlamadaki uslamlamada kullanılan çıkarım kuralları, *Principia Mathematica*'da kullanılanlardan çok daha güçlü iseler, uslamlamadaki varsayımların tutarlılığı, biçimselleştirilmiş sayılar kuramının tutarlılığı ölçüsünde kuşkulu olacaktır; bu durumda kanıtlama aldatıcı bir zaferden ibaret olacaktır, bir ejderhanın öldürülmesi bir diğerini yaratacaktır. Her durumda, eğer kanıtlama sonlayıcı değilse, Hilbert'in özgün programının amaçlarını gerçekleştiremeyecektir; ve Gödel'in uslamlaması *Principia Mathematica*'nın (veya benzer dizgelerin) tutarlılığının sonlayıcı kanıtlamasının verilebilmesini olanak dışında bırakacaktır.

Gödel'in ulaştığı ikinci ana sonuç daha da şaşırtıcı ve devrimcidir; çünkü aksiyomatik yöntemin gücü için temel bir sınırlandırma olduğunu kanıtlamaktadır. Gödel, *Principia*'nın veya içinde aritmetiğin geliştirilebileceği herhangi bir dizgenin *özsel olarak tamamlanmamış olduğunu* [*eksikli olduğunu*] göstermiştir. Başka bir deyişle, sayılar kuramının herhangi tutarlı bir biçimselleştirmesi verildiğinde, sayılar kuramının bu dizgenin içinde olan, ama o dizgeden türetilemeyen doğru önermeleri vardır. Bu dönüm noktası bir açıklamayı hak ediyor. Matematiğin içinde her türlü kanıtlama girişimine karşı gelen, ama hiçbir karşı örneği de olmayan birçok genel önerme vardır. Bu konudaki klasik örnek, her çift sayının iki asal sayının toplamı olduğunu öne süren "Goldbach teoremi"dir [veya "Goldbach'ın iddiası"]. Şimdiye kadar iki asal sayının toplamı olmayan hiçbir çift sayı bulunmadığı halde, Goldbach'ın iddiasının istisnasız her çift sayı için geçerli olduğunun kanıtı verilememiştir. Öyleyse bu, doğru olabilecek, ama sayılar kuramının biçimsel bir uyarlamasının aksiyomlarından türetilemeyebilecek bir aritmetik önermesine bir örnektir. Şimdi varsayalım ki, Goldbach'ın iddiası aksiyomlardan türetilebilir olmasa da, gerçekten evrensel olarak doğrudur. Bu varsayıma göre, Goldbach'ın iddiası gibi şimdiye kadar kanıtlanmamış önermeleri dizgeden türetilebilir kılmak için aksiyomlarda yapılması gereken değişiklikler veya eklemeler ne olmalıdır

diye soralım? Gödel'in ulaştığı sonuçlar, yukarıdaki varsayım doğru olsa bile bu güçlüğe bir çare bulunamayacağını göstermiştir. Yani *Principia Mathematica* yeni aksiyomlar ve kurallarla istenildiği kadar genişletilse bile, yine de bu yeni genişletilmiş dizgeden biçimsel olarak türetilemeyecek aritmetiksel doğruluklar her zaman olacaktır.[1]

Gödel bu sonuçları nasıl kanıtlamıştır? Kendisinin de işaret ettiği gibi uslamlamasının yapısı bir noktaya kadar, Fransız matematikçisi Jules Richard tarafından 1905'te ortaya atılan ve "Richard Paradoksu" olarak bilinen bir mantıksal çatışkıyı [antinomiyi] model olarak almıştır. Şimdi bu paradoksun ne olduğuna bakalım.

Sayal sayıların saf aritmetiksel özelliklerinin formüle edileceği ve tanımlanacağı herhangi bir dili ele alalım (örneğin İngilizce). Bu dilde söylenebilecek tanımları inceleyelim. Şurası açık ki, döngüselliğe veya sonsuz gerilemeye düşmeden aritmetiksel özelliklere karşılık olan bazı terimler açık olarak tanımlanamazlar –çünkü her şeyi tanımlayamayız ve mutlaka bir yerden başlamak zorundayız– eğer tanımlanırlarsa da olasılıkla başka şekilde anlaşılabilirler. Hangi terimlerin tanımlanmamış veya "ilksel" terim olduklarının bizim amacımız açısından bir önemi yok; örneğin, 'bir tamsayı bir başkası tarafından bölünebilir' dediğimizde, veya 'bir tamsayı iki tamsayının çarpımıdır' vb. dediğimizde ne söylendiğinin anlaşıldığını varsayabiliriz. Asal sayı olma özelliği, böylece '1'den ve kendinden başka hiçbir tamsayıyla bölünmemek' biçiminde tanımlanabilir; benzer şekilde, tam kare olma özelliği de 'herhangi bir tamsayının kendisiyle çarpımı' olarak tanımlanabilir.

Bu tanımlardan her birinin ancak sonlu sayıda sözcük

---

[1] Bu aritmetiksel doğruluklar, ileride göreceğimiz gibi, dizge hakkında üst-matematiksel usavurmanın bazı biçimleriyle ortaya konabilir. Ancak bu yöntem, biçimsel dizgenin (deyim yerindeyse) kendi içinde olma gerekliliğini ve doğrulukların dizge içindeki aksiyomların biçimsel sonuçları olarak ortaya konma gerekliliğini sağlamaz. Demek ki, sayılar kuramının tamamını dizgeselleştirme yolu olarak düşünülen aksiyomatik yöntemin *içsel* bir sınırlılığı vardır.

içereceklerini, dolayısıyla sonlu sayıda abece harfi içereceklerini rahatlıkla görebiliriz. Buna göre, tanımları dizisel bir sıraya göre yerleştirebiliriz: Eğer bir tanımdaki var olan harflerin sayısı, bir diğer tanımın harflerinin sayısından küçükse, ilk tanım diğerinden önce yazılacaktır; ve eğer iki tanım da aynı sayıda harfe sahip ise, bunlardan hangisinin önce geleceği, her birinin sahip olduğu harflerin abecedeki sırasına bağlı olacaktır. Bu sıra temel alınarak her bir tanıma bir tek tamsayı karşılık gelecektir ve tanımın dizideki yerinin sayısını temsil edecektir. Örneğin, en az sayıda harfe sahip tanım 1 sayısına karşılık gelecek, dizide bundan sonra gelen tanım 2 sayısına karşılık gelecek ve bu böyle sürecektir.

Her tanıma bir tek tamsayı karşılık geldiğinden, bazı durumlarda tanımın belirttiği özelliklerle ona karşılık gelen tamsayının aynı özelliklere sahip olduğu durumlar olabilir.[2] Örneğin, '1'den ve kendinden başka hiçbir tamsayıyla bölünemez' tanımındaki deyimin sıra sayısının 17 olduğunu varsayalım; 17'nin kendisinin tanımdaki deyimle aynı özelliğe sahip olduğu açıktır. Öte yandan, 'bir tamsayının kendisiyle çarpılmasından elde edilen' tanımındaki deyimin sıra sayısının 15 olduğunu varsayalım; 15'in deyimde belirtilen özelliğe sahip olmadığı da açıktır. İkinci örnekteki durumu 15 sayısının *Richardcı* özelliğe sahip olması biçiminde betimleyelim; bu durumda ilk örnekteki 17 sayısı da *Richardcı* olma özelliğine sahip *olmayacaktır.* Genel olarak, '*x*'in Richardcı olması'nı, '*x*'in, tanımlar kümesinde karşılık geldiği sayının tanımda belirtilen özelliğe sahip olmaması' olarak kısaca ifade edebiliriz.

Şimdi Richard Paradoksunun dile getirilmesinde garip, ama özellikli bir yere geldik. Richardcı olma özelliğini tanımlayan deyim açıkça tamsayıların sayısal özelliklerini betimlemektedir. Dolayısıyla tanımın kendisi de yukarıda sözü

---

[2] Bu durumu şu örnekle gösterebiliriz: 'çokheceli' sözcüğünün bir sözcük listesinde olduğunu ve listede sıralanan her sözcüğün "tekheceli" ve "çokheceli" gibi betimsel etiketlerle nitelendirdiğimizi düşünelim. Bu durumda listedeki 'çokheceli' sözcüğü "çokheceli" etiketini taşıyacaktır.

edilen tanımlar dizisine aittir. Yani bu tanımın kendisine de karşılık gelen ve onun yerini belirleyen bir tamsayı vardır. Bu sayının *n* olduğunu varsayalım. Şimdi Russell Paradoksunu anımsatan bir biçimde şu soruyu soralım: *n* Richardcı mıdır? Okuyucu kuşkusuz gelmekte olan çelişkiyi artık tahmin ediyor. Çünkü *n*, yalnız ve yalnızca karşılık geldiği tanımlayıcı deyimin belirttiği özelliğe sahip değilse Richardcıdır (yani, *n* Richardcı olma özelliğine sahip değildir). Kısaca, *n* Richardcıdır yalnız ve yalnızca *n* Richardcı değilse; yani *n* Richardcıdır önermesi hem doğrudur, hem de yanlış.

Aslında burada ortaya çıkan çelişkinin, bir anlamda oyunu kuralına göre oynamamaktan gelen bir tür hile olduğuna işaret etmeliyiz. Tanımların dizisel sıralandırılmasının altında yatan çok temel ama üstü örtük varsayım, gayet uygun bir biçimde ortadan yok edilmiştir. Tamsayıların *saf aritmetiksel* özelliklerinin (toplama, çarpma ve benzeri aritmetiksel kavramların yardımıyla formüle edilen özellikler) tanımlarım ele almak konusunda karara varılmıştı. Ancak sonra, hiçbir uyarı yapılmadan, dizide aritmetiksel özellikleri formüle etmek için kullanılan bir *dile* başvuran bir tanımın kabul edilmesi istendi bizden, yani daha teknik bir deyişle, Richardcı olma özelliğinin tanımı başlangıçta amaçlanan diziye ait değildir; çünkü bu tanım deyimlerde kullanılan harf (ya da im) sayısı gibi üst-matematiksel kavramları da içermektedir. Eğer aritmetiğin *içindeki* önermelerle (yani hiçbir notasyon dizgesine başvuru yapmayan önermeler), aritmetiğin kodlandığı notasyon dizgesi *hakkındaki* önermeleri titizlikle birbirlerinden ayırırsak Richard Paradoksunun yanından dolaşmış oluruz.

Richard Paradoksunun inşasında kullanılan usavurma açıkça yanlış bir uslamlama içerir.[3] Bununla birlikte bu

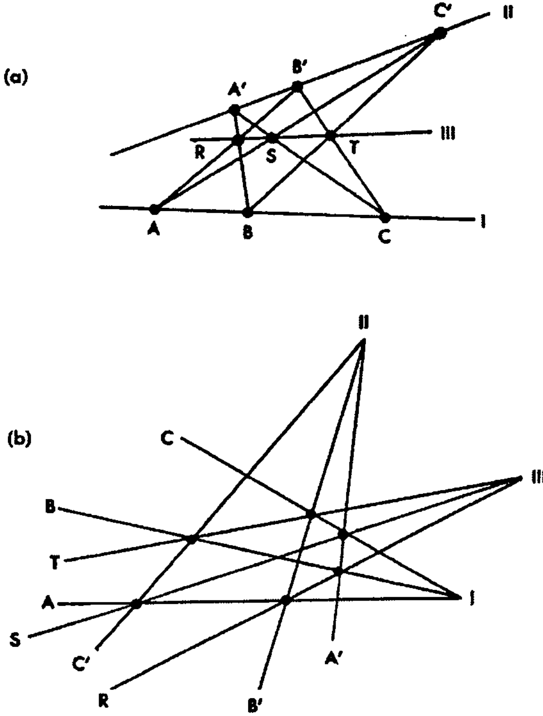
---

[3] Richard Paradoksunun daha dikkatle incelenmesi, bu paradoksun, biçimsel açıdan iyi tanımlanmamış ve örneğin İngilizce gibi son derece karmaşık bir doğal dile başvurmadan da, biçimsel dizgelerin bağlamı içinde inşa edilebileceğini gösteriyor. Böyle bir durumda, yanlış uslamlamanın [*fallacy*] çözümlenmesi daha incelikle yapılabilir; ve mantıksal düşünme akışının hangi adımda yürümediğinin tam olarak saptanabilmesinin, aslında

inşa, üst-matematiksel önermelerin yeterince anlaşılır bir biçimsel dizge sayesinde, dizgenin içinde bire-bir eşlenebilmesinin ya da yansıtılmasının olanaklı olduğunu düşündürtüyor. "Eşleme [haritalama]" fikri, bilindiği gibi, matematiğin birçok dallarında temel bir rol oynamaktadır. Bu fikir, doğal olarak haritaların yapılmasında da kullanılmaktadır; kürenin yüzeyinde bulunan şekiller bir düzlemin üzerine izdüşürülmektedir, böylece düzlemin üzerindeki şekillerin ilişkileri kürenin üzerindeki şekillerin ilişkilerini yansıtır. Geometriyi cebire çeviren koordinat geometrisinde de kullanılmaktadır bu fikir; böylece geometrik ilişkiler cebirsel olanlarla eşlenmiş olurlar. (Okuyucu, geometrinin aksiyomlarının tutarlılığını göstermek için, Hilbert'in cebri nasıl kullandığını açıklayan II. Bölüm'deki tartışmayı anımsayacak. Aslında Hilbert'in yaptığı, geometriyi cebire eşlemekti.) Eşleme matematiksel fizikte de önemli bir rol oynamaktadır; örneğin elektrik akımının özellikleri arasındaki ilişkiler, hidrodinamiğin dilinde temsil edilmektedirler. Ayrıca bir makine asıl boyutunda inşa edilmeden önce yapılan bir pilot modelde de eşleme kullanılmaktadır; örneğin küçük bir kanat yüzeyinin rüzgar tünelindeki aerodinamik özellikleri incelendiğinde veya hareket halindeki büyük boyutlu kütlelerin ilişkilerini incelemek için laboratuvarda elektrik devreleriyle kurulan düzeneklerde olduğu gibi. Şekil 3'te, izdüşümsel geometri olarak bilinen bir matematik dalındaki bir tür eşleme ilgi çekici görsel bir örnek oluşturmaktadır.

Eşlemenin [haritalamanın] temel özelliği, bir "nesneler" alanının içindeki bağıntıların soyut yapısının, başka bir "nesneler" (genellikle ilk kümedekinden farklı türden nesneler) alanının arasında da sağlandığının gösterilebilir olmasıdır. Bu özellik, Gödel'i, kanıtlamasının inşasında uyaran unsur olmuştur. Eğer biçimsel bir aritmetik dizgesi hakkındaki üst-matematiksel karmaşık önermeler, Gödel'in umduğu gibi dizgenin içindeki aritmetiksel önermelere çevrilebilirler-

Gödel'in 1931 makalesindeki fikirlere son derece yakın bir çözümlemeyi gerektirdiği görülecektir. Ancak böyle bir çözümleme bizim küçük kitabımızın kapsamının ötesindedir. [—*Ed.*]



Şekil 3.

Şekil 3 (a) Pappus Teoremini gösteriyor: Eğer A, B, C; I doğrusu üzerindeki üç farklı noktaysa ve A', B', C' farklı II doğrusu üzerindeki üç farklı noktaysa, AB' ve A'B, BC' ve B'C, CA've C'A doğru çiftleri tarafından belirlenen, sırasıyla R, S ve T noktaları aynı çizgi üzerinde yer alırlar (yani III çizgisi üzerinde bulunurlar).

Şekil 3 (b), yukarıdaki teoremin "eşleğini" [dualini] gösteriyor: Eğer A, B, C; I noktası üzerindeki üç farklı doğruysa ve A', B', C', farklı II noktası üzerindeki üç farklı doğruysa, AB' ve A'B, BC' ve B'C, CA' ve C'A nokta çiftleri tarafından belirlenen, sırasıyla R, S ve T doğruları aynı noktada kesişirler (yani III noktası üzerinde).

Yukarıdaki iki şekil, Görünüş olarak farklı olsalar da aynı soyut yapıya sahiptirler. Şekil 3 (a), şekil 3 (b) ile öyle bir bağıntı içindedir ki, ilkindeki noktalar, ikincideki çizgilere karşılık gelmektedir; öte yandan ilkindeki çizgiler de, ikincideki noktalara karşılık gelmektedir. Aslında (b), (a)'nın eşlemesidir [haritasıdır]: (b)'deki bir nokta, (a)'daki bir doğruyu temsil etmektedir (ya da onun 'ayna görüntüsüdür'); öte yandan (b)'deki bir doğru da, (a)'daki bir noktayı temsil etmektedir.

se (ya da yansıtılabilirlerse), üst-matematiksel kanıtlamaları kolaylaştırıcı bir kazanç elde edilmiş olacaktı. Çünkü aynen uzay eğrilerinin ve yüzeylerinin içsel geometrik ilişkilerini cebirsel formüllerle temsil etmek (ya da yansıtmak), geometrik ilişkilerin kendileriyle uğraşmaktan nasıl daha kolaysa, karmaşık mantıksal ilişkilerin aritmetiksel karşılıklarıyla (veya "yansımalı imgeleriyle") uğraşmak da, mantıksal ilişkilerin kendileriyle uğraşmaktan daha kolaydır.

Eşleme fikrinin değerlendirilmesi Gödel'in ünlü makalesindeki uslamlamanın anahtarıdır. Richard Paradoksunun biçemini izleyen, ama o paradoksun inşasındaki temelsizliklerden, yanlışlardan özenle kaçınan Gödel, bir biçimsel aritmetiksel hesap *hakkındaki* üst-matematiksel önermelerin, aslında bu hesabın [dizgenin] *içindeki* aritmetiksel tamdeyimlerle temsil edilebileceğini gösterdi. Gelecek bölümde ayrıntılı bir biçimde göstereceğimiz gibi, öyle bir temsil yöntemi geliştirmiştir ki, ne belirli bir üst-matematiksel önermeye karşılık gelen aritmetiksel tamdeyim, ne de bu aritmetiksel tamdeyiminin değiline karşılık gelen önerme, biçimsel hesabın [dizgenin] içinde kanıtlanabilirdir. Bu aritmetiksel tamdeyimlerden birinin, bir aritmetiksel doğruluğu kodlaması gerektiği halde, iki tamdeyim de aksiyomlardan türetilebilir değildir, dizge tamlığa sahip değildir [eksiklidir]. Gödel'in temsil yöntemi, ona, aynı zamanda "Biçimsel dizge [hesap] tutarlıdır" üst matematiksel önermesine karşılık gelen sayıkuramsal bir tamdeyimi de inşa etme olanağını ve bu önermenin biçimsel hesabın notasyonuna uygun şekilde yapılmış biçimsel çevirisinin de biçimsel hesabın içinde kanıtlanamaz olduğunu gösterme olanağını vermektedir. Bundan da, biçimsel hesabın içinde temsil edilemeyen çıkarım kuralları kullanılmadığı sürece üst-matematiksel önermelerin ortaya konamayacağı, öyle ki, bu tür önermelerin kanıtlanmasında kullanılması gereken kuralların kendi tutarlılığının, en az biçimsel hesabın kendisinin tutarlılığı kadar sorgulanmaya açık olduğu sonucu çıkmaktadır. Gödel bu büyük sonuçları olağanüstü dahice bir eşleme [haritalama] biçimi kullanarak ortaya koymuştur.

VII

GÖDEL KANITLAMASI

Gödel'in makalesi güçtür. Ana sonuçlara ulaşılmadan önce kırk altı ön tanımla birlikte birçok önemli hazırlık önermesine yeterince egemen olmak gerekir. Biz oldukça kolay bir yol izleyeceğiz; bununla birlikte, okuyucunun bu oldukça zorlu yapıyı izlemesi için dikkatli olması gerekir.

A. GÖDEL SAYILAŞTIRMASI

Gödel, tüm bilinen aritmetiksel yazımların [notasyonların] ifade edilebileceği ve aritmetiksel bağıntıların kurulabileceği bir biçimsel dizge [hesap] betimledi; biz buna "PM" adını veriyoruz.[1] Biçimsel dizgenin tamdeyimleri, temel söz dağarını oluşturan bir dizi temel imle inşa edilmiştir. Bir başlangıç tamdeyimleri (ya da aksiyomları) kümesi en temelde durmaktadır ve biçimsel dizgenin teoremleri de, özenle sıralanmış bir Dönüşüm Kuralları (ya da çıkarım kuralları) kümesinin yardımıyla aksiyomlardan türetilebilen tamdeyimlerdir.

Gödel, ilkin her temel ime, her tamdeyime (ya da imler dizisine) ve her kanıtlamaya (ya da tamdeyimlerin sonlu dizisine) bir tek sayı karşılık getirilebileceğinin olanaklı olduğunu göstermiştir. Ayırıcı bir işaret ya da bir etiket gibi işlev gören bu sayılara, imin, tamdeyimin veya kanıtlamanın

---

[1] Gödel, *Principia Mathematica*'da geliştirilen dizgenin bir uyarlamasını kullandı. Ama, içinde sayal sayıların (yani negatif-olmayan tamsayıların) ve onların toplama ve çarpımlarının inşa edilebileceği her biçimsel dizge, bu amaç için kullanılabilir. Biz "PM" kısaltmasını bu tür dizgeleri temsil etmek için kullanacağız.

"Gödel sayısı" denir.[2]

Asıl söz dağarına ait temel imler iki çeşide ayrılırlar: Sabit imler ve değişkenler. Gödel sayısı olarak 1'den 10'a kadar tamsayıların karşılık geldiği tam on tane sabit im olduğunu varsayacağız.[3] Bu imlerden birçoğunu okuyucu daha önce görmüştü: '~' (kısaca 'değil' için; '∨' (kısaca 'veya' için); '→' (kısaca 'eğer... demek ki' için); '=' (kısaca 'eşittir' için); '0' (sıfır sayısı için); '+' (kısaca 'artı' için); '×' (kısaca 'kere' için); ve üç noktalama imi, yani sol ayraç '(' , sağ ayraç ')' ve virgül ',' . Bunlara ek olarak: ters çevrilmiş harf '∃', 'en az bir tane vardır' diye okunacak ve "tikel niceleyici" olarak geçecektir; ve küçük harfle 's' de, bir sayının ardılını, yani bir sayının hemen ardından gelen sayıyı gösterecektir.

Örneklemek gerekirse: '(∃ *x*) (*x* = s0)', 'Öyle bir *x* vardır ki, bu *x*, 0 sayısının ardılıdır'. *Çizelge 2* on iki sabit imi göstermektedir ve bu imlere karşılık gelen Gödel sayılarının hangi anlama geldiklerini göstermektedir.

Okur, III. Bölüm'de, biçimsel hesapta simgelerin "anlamdan tümüyle arındırılmış" olduklarını ve sadece "boş imler" olduklarını ifade eden tümceleri hatırladığında, anlam içermediği varsayılan bu simgelere, şimdi bir "anlamlar" sütunu ayırmanın da ne demek olduğunu merak edecektir. Bunun ne demek olduğunu açıkça söyleyelim mi? Yanıt şudur: Gerçekten boş imlerle, gerçekten anlamlı olanlar arasında uzun ince bir orta yolda yürüyoruz. Bunu açıklayalım.

Çizelge 2'deki en sağdaki sütun her simgenin "alışılmış anlamı"nı vermektedir, yani insanların uzlaşım yoluyla her simgeye atfetme eğiliminde oldukları kavramı. Bununla bir-

---

[2] Gödel sayılarının kararlaştırılmasında birçok farklı seçenek vardır ve bunlardan hangisinin kullanıldığının ana uslamlamaya bir etkisi yoktur. Biz, okurun tartışmayı izleyebilmesi için sayıların imlere nasıl karşılık getirildiklerine somut bir örnek verdik. Bu kitapta kullanılan sayılaştırma yöntemi, Gödel tarafından 1931 makalesinde kullanılmıştı.

[3] Sabit imlerin sayısı biçimsel dizgenin nasıl kurulduğuna bağlıdır. Gödel, makalesinde yalnızca yedi sabit im kullanmıştır. Biz bu metinde, sunuştaki bazı karışıklıklardan kaçınmak için on iki sabit im kullanıyoruz. Her iki yol da uygundur.

Sabit imler	Gödel sayısı	Alışılmış anlamı
~	1	değil
∨	2	veya
→	3	eğer... demek ki
∃	4	en az bir
=	5	eşit
0	6	sıfır
s	7	bir sonraki [ardılı]
(	8	noktalama işareti
)	9	noktalama işareti
,	10	noktalama işareti
+	11	artı
×	12	kere

Çizelge 2

likte, PM'nin simgeleri, dizgenin teoremlerinin türetilmesinin sadece PM'nin biçimsel kurallarına göre yapılması bağlamında ve bu simgelerin neyi temsil ettiklerinin hiç dikkate alınmaması bağlamında, hiçbir anlam içermezler. Bu bağlamda PM, tümüyle boş imler içermektedir. Ancak matematiği ve mantığı biçimselleştirme amacında olan Russell ve Whitehead, biçimsel hesaplarının simgelerinin, onların uzlaşımsal yorumlarına olabildiğince uygun olmasına özen göstermişlerdir; dolayısıyla PM'nin çıkarım kuralları, kullanılan her simgenin onların uzlaşımsal anlamlarını *hak edecek* şekilde tasarlanmıştır.

Daha açık söylemek gerekirse, anlam içermeyen '0' simgesinin başkasını değil de "sıfır" yorumunu hak etmesini sağlayan nedir; anlam içermeyen '+' simgesinin başkasını değil de "artı" yorumunu hak etmesini sağlayan nedir ve belirli biçimsel kurallara uyan şu eğri büğrü çizgi tilde'nin ('~'), aslında soyut "değil" kavramını temsil ettiğine bizi ikna eden nedir?

Özetle söylersek bunun yanıtı, bir simgenin yorumunun, onun PM'nin teoremleri içinde nasıl davrandığına bağlı olduğudur (ve bu da, PM'nin aksiyomlarına ve çıkarım ku-

rallarına bağlıdır). Örneğin, eğer '0 + 0 = 0', '0 + s0 = s0' ve 's0 + s0 = ss0' gibi teoremleri, biçimsel dizgenin kurallarını izleyerek türetebiliyorsak, '0'ın, sıfır için kullanılan bir simgeden beklendiği gibi davrandığına; '='in eşitlik için kullanılan bir simgeden beklendiği gibi davrandığına ve '+'nın toplama için kullanılan bir simgeden beklendiği gibi davrandığına güven duymaya başlayabiliriz. Benzer şekilde, eğer '~ (0 = s0)', '~ ~ (0 = 0)', ve '~ (ss0 + ss0 = sss0)' gibi zincirlerin tümü PM'nin teoremleriyse, '~'nin, doğal yorumu "değil" olan bir simge olduğuna güven duymaya başlayabiliriz. Bu şekilde, teoremler, onlarda geçen simgelerin anlamlarını (veya daha teknik bir deyişle simgelerin yorumlarını) tam olarak saptarlar.

Bununla birlikte, bir simgeler grubu için muhtemel veya makul yorumlar öneren bir avuç teoreme sahip olmak durumu ile bu yorumların kesinlikle güvenilir oldukları konusunda en küçük bir kuşkunun bile kalmaması durumu arasında dağlar kadar fark var. Böyle bir güven için, teoremlerin yakaladığı daha geniş bir doğruluklar ailesini görmemiz gerekir.

PM biçimsel dizgesindeki simgelerin standart yorumlarını sabitleyebilmek için, 1931 tarihli makalesinin V. Önerme'sinde Gödel göstermiştir ki, PM'nin sonsuz bir teoremler kümesi vardır, öyle ki bunlardan her biri, yukarıda verdiğimiz çizelgedeki alışılmış anlamlarına göre yorumlandıklarında bir aritmetiksel doğruluğu ifade ederler; öte yandan bir sonsuz aritmetiksel doğruluklar kümesi (*ilksel yinelgen* [*primitive recursive*] olanlar) vardır; öyle ki, eğer bunlardan her biri yukarıdaki çizelge aracılığıyla biçimsel önermelere çevrilirlerse, PM'nin bir teoremini verirler.[4] Doğrulukların ve yorumlanmış teoremlerin son derece dizgesel bir şekilde karşılıklı gelmesi iki şeyi aynı anda yapar: Sayılar

4 İlksel yinelgen doğrulukların sonsuz kümesi tüm düzgün toplamaları, tüm düzgün çarpmaları ve "17 yedinci asal sayıdır", "21 bir asal sayı değildir" gibi çok çeşitli önermeleri içerir. Tüm ilksel yinelgen doğrulukların PM'nin teoremlerini vermesi durumu, PM'nin simgelerine atfettiğimiz anlamların hak edildiğini güvence altına alır.

kuramı için bir aksiyomatik dizge olarak PM'nin sadece gücünü onaylamakla kalmaz, aynı zamanda her bir simgenin uzlaşımsal yorumunu da tam olarak saptar.

Kısaca, Gödel, PM'nin simgelerinin *Çizelge 2*'de verilen "anlamlarını" hak ettiklerini ikna edici bir biçimde göstermiştir. Bugün, Gödel'in bu anahtar sonucu "Karşılıklılık Lemması" adıyla bilinmektedir. Bu ad, sağlama aldığı ikili karşılıklılıktan gelmektedir: Öncelikle, her ilksel yinelgen doğruluk, biçimsel dizgenin bir simgeler zinciri olarak kodlandığında, bir teoremdir ve ikinci olarak, bire bir karşılıklılık temelinde biçimsel simgeler amaçlanan anlamlarını hak ederler. Bundan dolayı da, doğruluk ve anlamın birbirlerinden ayrılmaz şekilde iç içe geçtiklerini görüyoruz.

Sabit imlerin yanında, PM'de üç tür değişken vardır: *Sayısal değişkenler* '*x*', '*y*', '*z*', vb., bunların yerine ('ss0' gibi) rakamlar ve ('*x* + *y*' gibi) sayısal deyimler koyulabilir; önerme değişkenleri '*p*', '*q*', '*r*', vb., bunların yerine tamdeyimler (tümceler) koyulabilir; ve yüklem değişkenleri '*P*', '*Q*', '*R*', vb., bunların yerine 'asaldır', '...den büyüktür' vb. gibi yüklemler koyulabilir. Değişkenler, aşağıdaki kurallara uygun olarak Gödel sayılarına karşılık getirilirler: *(i)* her faklı sayısal değişkene 12'den büyük bir asal sayı; *(ii)* her farklı önerme değişkenine 12'den büyük olan bir asal sayının karesi ve *(iii)* her farklı yüklem değişkenine 12'den büyük olan bir asal sayının kübü karşılık getirilir. Aşağıdaki çizelge bazı değişkenlerin Gödel sayılarının yukarıdaki kuralların kullanımıyla nasıl belirlendiğini gösteriyor.

Sayısal değişkenler	Gödel sayısı	Olanaklı yerine koyma
x	13	0
y	17	s0
z	19	*y*

Sayısal değişkenler 12'den büyük asal sayılarla ilişkilendirilmişlerdir.

Sayısal değişkenler	Gödel sayısı	Olanaklı yerine koyma
Önerme değişkenleri	Gödel sayısı	Olanaklı yerine koyma
p	13^2	$0 = 0$
q	17^2	$(\exists x)(x = \mathrm{s}y)$
r	19^2	$p \rightarrow q$

Önerme değişkenleri 12'den büyük asal sayıların kareleriyle ilişkilendirilmişlerdir.

Yüklem değişkenleri	Gödel sayısı	Olanaklı yerine koyma
P	13^3	$x = \mathrm{s}y$
Q	17^3	$\sim (x = \mathrm{ss}0 \times y)$
R	19^3	$(\exists z)\ (x = y + \mathrm{s}z)$

Yüklem değişkenleri 12'den büyük asal sayıların kübleriyle ilişkilendirilmişlerdir.

Çizelge 3

Şimdi PM'nin bir tamdeyimini, örneğin '$(\exists x)(x = \mathrm{s}y)$' tamdeyimini ele alalım. (Bu tamdeyim şöyle okunuyor: 'Öyle bir x vardır ki, bu x, y'nin ardılıdır'; bu tamdeyim aslında y değişkeni hangi sayının yerinde durursa dursun, onun bir ardılı olduğunu söylüyor.) Bu tamdeyimin on oluşturucu temel imine karşılık gelen sayılar sırasıyla şunlardır: 8, 4, 13, 9, 8, 13, 5, 7, 17, 9. Şimdi bu karşılık gelmeyi gösterelim:

$$\begin{array}{cccccccccc} (& \exists & x &) & (& x & = & \mathrm{s} & y &) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 8 & 4 & 13 & 9 & 8 & 13 & 5 & 7 & 17 & 9 \end{array}$$

Bununla birlikte bir tamdeyime, bir sayılar dizisi karşılık getirmek yerine *tek* bir sayı karşılık getirmek çok önemlidir. Neyse ki bu kolayca yapılabilir. Bir tamdeyime karşılık

gelecek tek bir sayı, büyüklük sırasına göre dizilen asal sayıların, tamdeyimde karşılık geldikleri imin Gödel sayısına göre kuvvetleri alındıktan sonra birbirleriyle çarpılmasıyla bulunacak sayı olacaktır. Böylece yukarıdaki tamdeyime şu sayı karşılık gelecektir:

$$2^8 \times 3^4 \times 5^{13} \times 7^9 \times 11^8 \times 13^{13} \times 17^5 \times 19^7 \times 23^{17} \times 29^9.$$

Bu çok büyük sayıya *m* diyelim. Benzer biçimde, ne kadar im varsa o kadar asal sayının çarpımı (her asal sayının, o ime karşılık gelen Gödel sayısı kadar kuvveti alınmaktadır) ile bulunacak sayı, her sonlu temel im dizisine ve özelde her tamdeyime karşılık getirilecektir.[5]

Son olarak, bazı kanıtlamalarda bulunabilecek bir tamdeyim *dizisini* göz önüne alalım; örneğin şu diziyi:

$$(\exists x)\ (x = \mathrm{s}\,y)$$
$$(\exists x)\ (x = \mathrm{s}\,0)$$

Alttaki tamdeyim çevrildiğinde "Sıfırın bir ardılı vardır" diye okunur; bu tamdeyim, PM'nin, herhangi bir sayısal değişkenin (burada '*y*' değişkeni) yerine, herhangi bir sayısal ifadenin (burada '0' rakamı) konulabileceğini bildiren çıkarım kurallarından birinin aracılığıyla üsttekinden mekanik

[5] PM'de, temel sözcük dağarında bulunmayan bazı imler yer alabilir; bunlar, temel imler aracılığıyla tanımlanarak dizgeye dahil edilirler. Örneğin önerme eklemi 've'nin kısaltılmışı olarak kullanılan '.' imi, şöyle tanımlanabilir: '*p* . *q*' , '~ (~*p* v ~*q*)'nun kısaltılmışıdır. Bu tanımlanan ime hangi Gödel sayısı karşılık gelmektedir? Eğer tanımlanmış imleri içeren deyimlerin, onları tanımlayan eşdeğerleriyle değiştirilebildiklerini görürsek, yanıt son derece açıktır ve dönüştürülmüş deyim için bir Gödel sayısının belirlenebileceği bellidir. Buna göre '*p* . *q*' tamdeyiminin Gödel sayısı, '~ (~*p* v ~*q*)' tamdeyiminin de Gödel sayısıdır. Benzer biçimde, onluk sayı dizgesinin rakamları aşağıdaki gibi tanımlanabilirler: Örneğin 's0' için kısaca '1', 'ss0' için kısaca '2', 'sss0' için kısaca '3' vb. Böylece '~(2 = 3)' tamdeyiminin Gödel sayısını bulmak için, tanımlanmış imleri eşdeğerlerinin yerine koyarız ve '~(ss0 = sss0)' saf PM tamdeyimini buluruz, sonra da verilen kurallara göre Gödel sayısını saptarız.

şekilde türetilebilir.[6]

Üstteki tamdeyimin Gödel sayısını daha önce belirledik: *m*. Şimdi *n*'nin, alttaki tamdeyimin Gödel sayısı olduğunu varsayalım. Daha önce işaret ettiğimiz gibi, tamdeyim dizilerine, bir sayılar dizisi yerine tek bir sayının karşılık getirilmesi önemlidir. Dolayısıyla, büyüklük sırasına göre ilk iki asal sayının (yani 2 ve 3 sayıları), dizideki tamdeyimlere karşılık gelen Gödel sayılarına göre kuvvetleri alınmış çarpımlarıyla bulunan sayıyı, bu tamdeyim dizisine karşılık getiriyoruz. Eğer bu bulunan sayıya *k* dersek, $k = 2^m \times 3^n$ diye yazabiliriz. Bu yöntemi uygulayarak her tamdeyim dizisi için bir sayı elde edebiliriz. Özetlersek, PM biçimsel dizgesindeki her deyime, ister bir temel im olsun, ister bir imler dizisi olsun veya böyle dizilerin bir dizisi olsun, bir tek Gödel sayısı karşılık getirilebilir.

Şimdiye kadar yapılan, biçimsel dizgeyi tümüyle "aritmetikselleştirmek" için bir yöntem geliştirmekti. Bu yöntem, esas olarak biçimsel dizgedeki deyimlerle belirli bir pozitif tamsayı kümesi arasında kurulan bire bir karşılıklılığın kurallarını belirlemektedir.[7] Bir deyim verildiğinde, ona karşılık gelen tek

---

[6] Okur, bir kanıtlamayı, tamdeyimlerin sonlu dizisi olarak tanımladığımızı anımsayacaktır. Bu tamdeyimlerden her biri ya bir aksiyomdur ya da dizideki diğer tamdeyimlerden PM'nin Dönüşüm Kuralları yardımıyla türetilebilir. Bu tanıma göre yukarıdaki dizi bir kanıtlama değildir; çünkü ilk tamdeyim bir aksiyom değildir ve onun aksiyomlardan türetilmesi gösterilmemiştir. Dizi bir kanıtlamanın küçük bir kısmından ibarettir. Tam bir kanıtlama örneği vermek çok uzun olacaktır ve gösterim açısından yukarıdaki dizi yeterli olacaktır.

[7] Her pozitif tamsayı bir Gödel sayısı değildir. Örneğin 100 sayısını göz önüne alalım. 100, 12'den büyük olduğundan temel bir sabit imin Gödel sayısı olamaz ve 12'den büyük bir asal sayı olduğundan, ne de böyle bir asal sayının karesi ya da kübü olduğundan, bir değişkenin Gödel sayısı da olamaz. 100'ü asal çarpanlarına ayırdığımızda, onun $2^2 \times 5^2$'ye eşit olduğunu göreceğiz; 3 asal sayısı ise çarpanların ayrılmasında ortada gözükmüyor, yani atlanmıştır. Ama, verilen kurallara göre, bir tamdeyimin Gödel sayısı (ya da bir tamdeyim dizisinin), her birinin belli kuvveti alınmış ardışık asal sayıların çarpımı olması gerekir. 100 sayısı bu koşulu sağlamamaktadır. Kısaca 100 sayısı, sabit imlere, değişkenlere veya tamdeyimlere karşılık getirile-

Gödel sayısı kolayca hesap edilebilir.

Ancak bu, olayın yalnızca bir yüzü. Herhangi bir sayı verildiğinde, bunun Gödel sayısı olup olmadığını belirleyebiliriz; eğer Gödel sayısı ise, onun temsil ettiği deyim çözümlenebilir, ya da "elde edilir". Eğer verilen sayı 12'den küçük ya da eşitse, bu, temel sabit imlerin Gödel sayısıdır. Bu im belirlenebilir. Eğer verilen sayı 12'den büyükse, bu sayı asal çarpımlarına ancak bir tek şekilde ayrılabilir (ünlü aritmetik teoreminden bildiğimiz gibi).[8] Eğer verilen sayı 12'den büyük bir asal sayıysa veya bu asal sayının ikinci ya da üçüncü kuvvetiyse, bu sayı belirlenebilir bir değişkenin Gödel sayısıdır. Eğer verilen sayı belirli kuvvetlerdeki ardışık asal sayıların çarpımı ise, bu sayı bir tamdeyimin ya da bir tamdeyimler dizisinin Gödel sayısıdır. Bu durumda ona karşılık gelen deyim tam olarak belirlenebilir. Bu programı izleyerek, herhangi bir sayı verildiğinde, bu sayıyı bir makine gibi incelemeye alabiliriz, nasıl inşa edildiğini, nelerden oluştuğunu keşfedebiliriz; ve bu sayının öğelerinden her biri, temsil ettiği deyimin bir öğesine karşılık geldiğinden, bu deyimi yeniden kurabiliriz ve yapısını çözümleyebiliriz vb. *Çizelge 4*, verilen bir sayının Gödel sayısı olup olmadığından nasıl emin olacağımızı ve eğer öyleyse simgelediği deyimin ne olduğunu nasıl bulacağımızı gösteriyor.

B. ÜST-MATEMATİĞİN ARİTMETİKLEŞTİRİLMESİ

Gödel'in bundan sonra yaptığı, eşlemenin dahice bir uygulamasıdır. Biçimsel dizgenin içindeki deyimlerin yapısal özellikleriyle ilgili tüm üst-matematiksel önermelerin, biçimsel dizgenin kendi içine *yansıtılabileceğini* göstermiştir Gödel. Bu yöntemin altında yatan fikir şudur: PM'deki her deyime belirli bir sayı (Gödel sayısı) karşılık geldiğinden, biçimsel deyimler hakkındaki ve onların birbirleriyle olan *tipografik*

---

mez; dolayısıyla bir Gödel sayısı değildir.

[8] Bu teorem, *aritmetiğin temel teoremi* olarak bilinir. Eğer bir tamsayı bölünebilir ise (yani asal değilse), o tamsayının asal çarpanlarına tek biçimde ayrılacağını ifade etmektedir.

A	243.000.000
B	64 × 243 × 15,625
C	$2^6 \times 3^5 \times 5^6$
D	6 5 6 ↓ ↓ ↓ 0 = 0
E	0 = 0

"Sıfır eşittir sıfır"ı ifade eden PM'nin bu tamdeyiminin Gödel sayısı 243 milyondur. A'dan E'ye doğru yukarıdan aşağıya okuduğumuzda, çizelge sayının temsil ettiği deyime nasıl çevrildiğini gösteriyor. Aşağıdan yukarıya doğru okuduğumuzda ise tamdeyimin sayısının nasıl türetildiğini gösteriyor.

Çizelge 4

bağıntıları hakkındaki üst-matematiksel önermelerin, onlara karşılık gelen sayılar (Gödel sayısı) hakkındaki ve bu sayıların birbirleriyle olan *aritmetiksel* bağıntıları hakkındaki önermeler olduğu öne sürülebilir. Bu yolla üst-matematik tümüyle "aritmetikselleştirilmiş" olacaktır. Bunun basit bir benzeşimini vermek için: Bazı çok kalabalık süper marketlere gelen müşterilere, üzerinde kasalardaki bekleme sıralarını gösteren numaraların yazıldığı kartlar verildiğini düşünelim. Bu sayılara bakarak kaç kişinin işlemini tamamladığını, kaç kişinin sırada beklediğini, kimin kimden önce geldiğini, ne kadar sıra beklemeleri gerektiğini kestirmek olanaklıdır. Örneğin, Bay Nagel'in sayısı 37, Bay Newman'ınki de 53 ise, Bay Newman'ın sırasının Bay Nagel'den sonra geldiğini söylemek yerine, 37'nin 53'ten küçük olduğuna işaret etmek yeterlidir.

Süper marketteki durum üst-matematikte de geçerlidir. Daha somutlaştırırsak, üst-matematiksel soruların araştırılması, (tercihen büyük) tamsayıların bazı aritmetiksel özelliklerini ve bağıntılarını farklı bir yoldan (ya da dolaylı olarak) inceleyerek yapılabilir. Simge zincirleri hakkındaki

her üst-matematiksel önermenin ve onların *tipografik* olarak nasıl bağlantılı olduklarının (örneğin, üç tamdeyimden meydana gelen bir zincirin, bir dördüncünün kanıtlanmasını sağladığının), Gödel sayıları zincirleri hakkındaki önermelere karşılık geldiklerini ve bu sayıların *aritmetiksel* olarak nasıl bağlantılı olduklarını göreceğiz.

Şimdi bu genel saptamaları basit bir örnekle anlatalım.[9] Sıfırın kendisine eşit olmadığı gibi aşikâr bir yanlışlığı ifade eden şu basit tamdeyimi alalım: '~ (0 = 0)'. Şimdi de, bu tamdeyimin ilk simgesinin (tilde) '~' olduğuna ilişkin doğru bir üst-matematiksel gözlemde bulunalım. Eğer, Gödel sayılaştırması sayesinde üst-matematik, tamsayılar alanına ve onların özelliklerine haritalanabiliyorsa, bu doğru gözlemin de

---

9 Kitabın ilk baskısındaki örnek Hofstadter tarafından değiştirilmiş. Karşılaştırma amacıyla ilk baskıdaki paragrafı dipnota aldım. [— *Çev.*]

«Önermeler mantığının ilk aksiyomunu göz önüne alın (bu, aynı zamanda söz konusu biçimsel dizgenin de bir aksiyomu olacaktır): '$(p \vee p) \rightarrow p$'. Bu aksiyomun Gödel sayısı olan

$$2^8 \times 3^{11^2} \times 5^2 \times 7^{11^2} \times 11^9 \times 13^3 \times 17^{11^2}$$

sayısını 'a' harfiyle göstereceğiz. Ayrıca Gödel sayısı

$$2^8 \times 3^{11^2} \times 5^2 \times 7^{11^2} \times 11^9$$

olan '$(p \vee p)$' tamdeyimini göz önüne alalım; bunu da 'b' harfiyle göstereceğiz. Şimdi '$(p \vee p)$' tamdeyiminin, aksiyomun ilk kısmı olduğunu öne süren üst-matematiksel önermeyi ifade ediyoruz. Biçimsel dizgede bu önermeye karşılık gelen aritmetiksel tamdeyim hangisidir? Şimdi, daha küçük tamdeyim olan '$(p \vee p)$'nin, daha büyük tamdeyim olan aksiyomun ilk kısmı olması için, ilkini temsil eden 'b' (Gödel) sayısının, ikinciyi temsil eden 'a' (Gödel) sayısının bir çarpanı olması gerektiği açıktır. "Çarpanı olma" deyiminin biçimselleştirilmiş aritmetiksel dizgede uygun şekilde tanımlanmış olduğunu varsayarsak, yukarıdaki üst-matematiksel önermeye karşılık gelen tek aritmetiksel tamdeyim, "b, a'nın çarpanıdır" tamdeyimidir. Ayrıca eğer bu tamdeyim doğruysa, yani b, a'nın çarpanıysa, '$(p \vee p)$'nin '$(p \vee p) \rightarrow p$'nin ilk kısmı olduğu da doğrudur.»

doğru bir sayılar kuramı bildirimine haritalanması gerekir. Şimdi soru şudur: Hangisine? Soruyu yanıtlayabilmek için önce söz konusu tamdeyimin Gödel sayısını bulmak gerekir; yani $2^1 \times 3^8 \times 5^6 \times 7^5 \times 11^6 \times 13^9$; buna '*a*' diyelim. Aradığımız önerme, açıkça bu büyük sayının, onun asal çarpanlarına ayrılmasıyla ilgili olmalıdır; özellikle, *a*'nın asal çarpanlarında bulunan en küçük asal sayının (yani 2'nin) üstel kuvvetinin 1 olduğu bildirimidir. Başka bir deyişle, sayılar hakkında aranılan bildirim şudur: '2, *a*'nın bir çarpanıdır, ama 2^2, *a*'nın bir çarpanı değildir'.

Böylece, tamdeyimimizin ilk simgesinin tilde olduğunu söylemenin sayı-kuramsal yolunu bulduk. Anahtar adım budur, ama bir sonraki adım da önemlidir ve bu adım, doğal dilin bu tümcesini PM'nin bir biçimsel zincirine dönüşmesini gerektirir. '*x*, *y*'nin bir çarpanıdır' yüklemi PM notasyonunda nasıl ifade edilir? Neyse ki bu oldukça kolaydır; hedef tümceyi şu biçim altında yeniden ifade ederek yapılabilir: 'Öyle bir *z* sayısı vardır ki, *y*, *z* ile *x*'in çarpımına eşittir'; bu da PM'nin şu tamdeyimine doğrudan çevrilebilir: '$(\exists z)\ (y = z \times x)$'. Bizim örneğimizde, bu yüklemi, birinin önünde tilde olmak üzere iki kez kullanmamız gerekir:

$$(\exists z)\ (\text{sss...sss0} = z \times \text{ss0}) \cdot \sim (\exists z)\ (\text{sss...sss0} = z \times (\text{ss0} \times \text{ss0}))$$

Burada iki kez geçen uzun rakam, tabi ki 's'nin tam olarak *a*'ya eşit olacak şekilde tekrarını içermelidir. Ortadaki noktanın 've' kavramını simgeleştirdiğine işaret edelim (Bkz. VII. Bölüm, 5. dipnot). Sonuçta tamdeyimimiz tam olarak şunu söylüyor: 'Öyle bir z sayısı vardır ki, *a*, *z*'nin 2 ile çarpımına eşittir, ve *z*'nin 2 × 2 ile çarpıldığında *a*'ya eşit olmasını sağlayan herhangi bir *z* sayısı yoktur'.

Biraz hantalca gibi gözükse de bu tamdeyim, başka bir tamdeyimin ilk simgesinin kimliği hakkındaki bir basit üstmatematiksel bildirimi PM'ce ifade etmenin yolunu göstermektedir. Her ne kadar bu tamdeyim, tam ifadesiyle yazıldığında inanılmaz büyük bir şey olsa da, kavramsal olarak basit bir tamdeyimdir. Ayrıca, '*x*, *y*'nin bir çarpanıdır' yüklemi ilksel yinelgen olduğundan (okur böyle olduğuna inan-

malı), Karşılıklılık Lemması, sayılar hakkında bir doğruluğu ifade eden yukarıdaki zincirin PM'nin bir teoremi olmasının güvencesini oluşturur.

Özetle, "'~ (0 = 0)'ın ilk simgesi tilde'dir" doğru üst-matematiksel önermesinin biçimsel çevirisi PM'nin bir teoremidir. Böylece, öncelikle Gödel sayılaştırmasının dahice bir haritalaması ve ikinci olarak simgelerin kendi anlamlarını hak etmesini güvence altına alan Karşılıklılık Lemması sayesinde, PM'nin kendi kendisinden (yani PM'nin teoremleriyle yansıtılabilen doğru üst-matematiksel önermeler aracılığıyla) nasıl söz edebildiğinin ilk örneğini görmüş olduk.

Yukarıda işaret ettiğimiz bu son derece basit durum, Gödel'in keşfinin özünde yatan çok genel ve çok derin sezgiyi örneklendirmektedir: Uzun simge zincirlerinin tipografik özellikleri kendileri hakkında dolaylı yoldan, ama büyük tamsayıların asal çarpanlarının özellikleri yoluyla son derece sağlam bir şekilde söz edebilirler. İşte bu tam da "üst-matematiğin aritmetikleştirilmesi" ifadesiyle kastettiğimiz şeydir. Bu fikri, aritmetiğin (sayılar kuramının) PM içindeki biçimselleştirilmesiyle bir araya getirdiğimizde, üst-matematiğin PM içindeki biçimselleştirilmesi fikrine de ulaşmış oluruz.

Şimdi dikkatimizi daha karmaşık bir üst-matematiksel önermeye yöneltelim: '*x* Gödel sayılı tamdeyimler dizisi, *z* Gödel sayılı tamdeyimin (PM içindeki) kanıtlamasıdır'. Üst-matematiğin aritmetikleştirilmesi sayesinde, bazı imler arasındaki tipografik bağıntılar hakkındaki bu önerme, sayılar kuramı içinde *x* ile *z* arasındaki saf sayısal bağıntılar hakkındaki bir önermeyle yansıtılır. (Bu bağıntının karmaşıklığı hakkında bir fikir edinmek için yukarıdaki örneği anımsayalım; bu örnekte $k = 2^m \times 3^n$ Gödel sayısı, sonucu (yani son satırı) *n* Gödel sayısı olan kanıtlamaya (kanıtlamanın bir parçasına) karşılık getiriliyordu. Biraz düşünüldüğünde, kanıtlamanın Gödel sayısı olan *k* ile, sonucun Gödel sayısı olan *n* arasında, belirli, ama hiçbir şekilde basit olmayan bir aritmetiksel bağıntı olduğu görülecektir.) *x* ile *z* arasındaki

bu bağıntıyı, 'dem (*x*, *z*)'[10] olarak yazıyoruz. Küçük harf 'd' ile yazılan 'dem' bu sayı-kuramsal bağıntının karşılık geldiği üst-matematiksel bağıntıyı ('*x* Gödel sayılı tamdeyimler dizisi, *z* Gödel sayılı tamdeyimin PM içindeki kanıtlamasıdır') bize anımsatması için seçildi.

'dem' ile gösterilen sayısal bağıntının PM'nin tüm aksiyom ve çıkarım kurallarına örtük olarak bağlı olduğuna işaret edelim. Eğer PM'de herhangi bir değişiklik yapacak olursak, "kanıtlama" anlayışı da bir miktar farklı olacaktır; buna bağlı olarak da bir miktar farklı bir sayısal bağıntıya haritalanacaktır, yine de dem'e çok benzer olacaktır ve dem'nin PM'de oynadığı işlevin aynısını değişen dizgede oynayacaktır.

Gödel, makalesinde, dem (*x*, *z*)'in *x* ve *z* sayıları arasındaki ilksel yinelgen bir bağıntı olduğu ve bundan da (böyle olduğuna inanacağız) Gödel'in Karşılıklılık Lemması aracılığıyla PM'de bu bağıntıyı biçimsel notasyonla ifade eden bir tamdeyim olduğu sonucunun çıktığı konusunda okurlarını ikna edebilmek için çok sıkıntı çekmişti. Bu tamdeyimi onun biçimselliğine işaret edecek şekilde büyük harf 'D' ile Dem (*x*, *z*) olarak yazacağız.

Şu ayrıma dikkat edelim: 'dem (2, 5)', 2 ve 5 sayıları hakkında anlamlı bir önermedir (anlamlıdır ama açıkça yanlıştır; çünkü 2, herhangi bir kanıtlamanın Gödel sayısı değildir ve 5, bütün bir tamdeyimin Gödel sayısı değildir); öte yandan onun biçimsel karşılığı olan 'Dem (ssO, sssssO)', PM'nin bir zinciridir ve ne doğrudur, ne de yanlış, sadece anlamsızdır.[11] Gödel'in Karşılıklılık Lemması bir kere daha

---

[10] Burada 'dem', '*demonstration*'ın, yani 'kanıtlama'nın kısaltılmışıdır. [— *Çev.*]

[11] Biçimsel ve biçimsel olmayan düzeyler arasındaki önemli farka basit bir örnek vermek için "iki artı iki beşe eşit değildir" aritmetiksel bildirimini ele alalım. Bu, PM'nin bir zinciri değil, günlük dildeki bir önermedir ve doğrudur. '$2 + 2 \neq 5$' biçiminde de yazılabilir ama, bu da biçimsel bir yazım değildir ve onu oluşturan simgelerin anlamlı olduğu kabul edilmiştir. Bu önermenin biçimsel karşılığı '~(ssO + ssO = sssssO)' ise boş imlerden oluşan bir zincirdir ve dolayısıyla ne doğru, ne de yanlıştır, anlamsızdır.

sahneye girerek, sayı-kuramsal yüklem dem (*x*, *z*)'in her doğru somut örneklemesine karşılık olan 'Dem (sss...sss0, sss...sss0)' biçiminde bir teorem olmasını sağlar; bu tamdeyimde ilk s zincirinin uzunluğu *x* kadar, ikincisininki ise *z* kadardır.

PM içindeki 'Dem (*x*, *z*)' tamdeyiminin varlığı bize çok önemli bir şey söylemektedir: "şunlar-ve-şunlar PM'nin kuralları ile bunlar-ve-bunları kanıtlamaktadır" biçimine sahip doğru üst-matematiksel bildirimler, PM'nin teoremlerine yansıtılmışlardır. Benzer şekilde, "şunlar-ve-şunlar PM'nin kuralları ile bunlar-ve-bunları kanıtlamamaktadır" biçimine sahip her doğru üst-matematiksel önerme, '~Dem (sss..... sss0, sss....sss0)' biçimine sahip bir PM teoremi tarafından yansıtılır, tabi uygun sayıda 's' kullanılarak. Demek ki, Gödel'in haritalaması sayesinde PM, yine kendi hakkında sağlam bir şekilde konuşabilme gücüne sahip görünüyor.

Öte yandan, toplama, ilksel yinelgen olduğu için, Karşılıklılık Lemması bu tamdeyimin PM'nin bir teoremi olmasını sağlar. Bazen böyle bir PM tamdeyimi hakkında gevşek bir şekilde konuşarak onun doğru (ya da yanlış) söyleriz; bununla bu tamdeyimin ifade ettiği aritmetik önermesinin doğru (ya da yanlış) olduğunu söylemiş oluruz. Böyle bir gevşek konuşma açısından '~(ss0 + ss0 = sssss0)' doğru olacaktır.

Daha karmaşık bir örnek asallık kavramıyla ilgilidir. '*x* asaldır' sayı-kuramsal yüklemini 'as (*x*)' ile gösterelim. "Dokuz asaldır" (yanlış) önermesi 'as (9)' olarak yazılacaktır. Bu, PM'nin bir zinciri değildir, doğal dildeki bir tümcenin uygun bir kısaltılışıdır. Ancak, 'as (*x*)'in PM içinde bir biçimsel karşılığı vardır ve onu şöylece ifade edebiliriz: '~(∃*y*) (∃*z*) (*x* = ss*y* × ss*z*)'. (Şurası kesin ki, bu yazım PM içinde asallığı ifade edebilmenin olanaklı yollarından sadece bir tanesidir; okur, niye bu tamdeyimin uygun olduğunu anladığından emin olmalı.) Bu tamdeyimi büyük 'A' ile 'As (*x*)' olarak gösterebiliriz. Böylelikle dokuzun asal olduğunu söyleyen yanlış bildirim PM içinde 'As (sssssssss0)' olarak ifade edilecektir. Eğer bu bildirime karşılık gelen tamdeyim yazılacak olsaydı şunu elde edecektik: '~(∃*y*) (∃*z*) (sssssssss0 = ss*y* × ss*z*)'. Asallık, ilksel yinelgen olduğundan, Karşılıklılık Lemması, '~ ~(∃*y*) (∃*z*) (sssssssss0 = ss*y* × ss*z*)' tamdeyiminin kısaltılışı olan '~As (sssssssss0)' zincirinin PM'nin bir teoremi olmasını sağlayacaktır.

Gödel'in uslamlamasının dönüm noktasını anlatmadan önce, son bir kavrama ve ona karşılık gelen ek bir notasyona daha gerek var. Bir örnekle başlayalım: Birkaç sayfa önce gördüğümüz gibi '$(\exists x)$ $(x = sy)$' tamdeyiminin Gödel sayısı *m*'dir ve onda geçen değişkenlerden birinin Gödel sayısı ise 17'dir. Bu tamdeyimde, Gödel sayısı 17 olan değişkenin (yani '*y*'nin) yerine *m* rakamını koyalım. Elde ettiğimiz son derece uzun tamdeyim şudur: '$(\exists x)$ $(x =$ ssss...ssss0)', bu tamdeyimde $m + 1$ tane 's' vardır. (PM'nin bu yeni zinciri, gündelik dile çevirirsek, öyle bir *x* sayısı vardır ki, *x*, *m*'nin ardılıdır; veya kısaca *m*'nin bir ardılı vardır.)

Bu uzun tamdeyimin de bir Gödel sayısı vardır; bu sayı çok büyük olsa da ilkece gayet açıklıkla hesaplanabilir. Fakat hesaplamayı yapmak yerine, bu sayıyı anlamı açık bir üst-matematiksel nitelendirme ile belirleyebiliriz: Bu sayı, Gödel sayısı 17 olan değişkenin yerine *m* rakamı konularak bulunan, Gödel sayısı *m* olan tamdeyimden elde edilmiş tamdeyimin Gödel sayısıdır. Bu nitelendirme, belirli bir pozitif tamsayıyı *m* ve 17 sayılarının fonksiyonu olarak belirlemektedir.[12]

---

[12] Bu fonksiyon çok karmaşıktır. Ne kadar karmaşık olduğunu, onu ayrıntılı olarak formüle ettiğimizde göreceğiz. Bu formülasyonu işin sonuna kadar gitmeden formüle etmeye girişelim. Daha önce görmüştük ki m, yani '$(\exists x)$ $(x = sy)$'nin Gödel sayısı şuna eşittir:

$$2^8 \times 3^4 \times 5^{13} \times 7^9 \times 11^8 \times 13^{13} \times 17^5 \times 19^7 \times 23^{17} \times 29^9.$$

Bir önceki tamdeyimden '*y*' değişkeninin yerine m rakamı konularak elde edilen tamdeyimin Gödel sayısını bulmak için bu tamdeyimdeki imlere karşılık gelen sayıları, sırasıyla asal sayıların üstel kuvvetleri olarak yerleştiriyoruz. İlgilendiğimiz tamdeyimin '$(\exists x)$ $(x =$ sss...sss0)' olduğunu hatırlayalım, bu tamdeyimde 's' harfi $m + 1$ kez kullanılmıştır. Bu tamdeyimdeki temel imlerin Gödel sayıları:

$$8, 4, 13, 9, 8, 13, 5, 7, 7, 7,7,...,7, 7, 7, 7, 7, 6, 9.$$

Bu dizide 7 sayısı m + 1 kez kullanılmıştır. Daha sonra, ilk $m + 10$ asal sayının büyüklük sırasına göre çarpımım alıyoruz; her asal sayının, temel ime karşılık gelen Gödel sayısı kadar kuvveti

Bir zincirin kendi Gödel sayısını zincirin kendisinin yerine koymak (ve sonra da sonucun Gödel sayısını almak) gibi sanki döngüsellik içeriyormuş gibi görünen bu fikir, göreceğimiz gibi Gödel'in anahtar sezgilerinden biridir; ve Gödel, ilksel yinelgen olan bu fonksiyonun yeterince açık bir biçimde hesap edilebilen ve dolayısıyla Karşılıklılık Lemmasının kapsamına giren bir fonksiyon olduğu konusunda okuru ikna edebilmekte yine büyük sıkıntılarla karşılaşmıştır. Yeni Gödel sayısını, 'sub $(x, 17, x)$'[13] notasyonunu kullanarak eski Gödel sayısı *x*'in bir fonksiyonu olarak göstereceğiz. İfade etmesi biraz uzun olsa da, böyle yapmakla bu sayının tam olarak ne olduğunu belirleyebiliriz: Bu sayı, Gödel sayısı *x* olan tamdeyimden elde edilmiş tamdeyimin Gödel sayısıdır, öyle ki, bu tamdeyimde geçen '*y*' değişkeninin yerine *x* rakamı konulmuştur.[14]

---

alınmıştır. Bulacağımız sayıya *r* diyelim, böylece

$$r = 2^8 \times 3^4 \times 5^{13} \times 7^9 \times 11^8 \times 13^{13} \times 17^5 \times 19^7 \times 23^7 \times 29^7 \times 31^7 \times \ldots \times (p_{m+10})^9$$

buluyoruz; burada p_{m+10}, büyüklük sırasına göre (m + 10)'uncu asal sayıdır.

Şimdi iki Gödel sayısı *m* ve *r*'yi karşılaştıralım. *m*, 17. kuvveti alınmış bir asal çarpan içeriyor (çünkü ilk tamdeyim '*y*' değişkenini içeriyordu); *r* ise, m'nin tüm asal çarpanlarını ve bunun yanında daha başkalarını içeriyor, ama bunlardan hiçbirinin 17. kuvveti alınmamış. Öyleyse *r* sayısı, *m*'nin içinde 17. kuvveti alınmış asal çarpanların yerine, 17'den farklı kuvvetlerdeki çarpanların konulmasıyla m'den elde edilebilir. Ancak r'nin m ile olan bağıntısını tüm ayrıntılarıyla verebilmek, önemli bir ek notasyonu devreye sokmadan olanaksızdır; Gödel'in özgün makalesinde bu yapılmıştır. Umarız ki, okuru bu konuda ikna etmek üzere, *r* sayısının, *m* ve 17'nin iyi tanımlanmış bir sayı-kuramsal fonksiyonu olduğu konusunda yeterince bilgi verilmiştir.

13 Burada "sub", "*substitution*"m, yani "yerine koyma"nın kısaltılmışıdır. [— *Çev.*]

14 Yukarıda belirtilen üst-matematiksel nitelendirmede, belli bir değişkenin yerine koyma yapılırken niye "*x* rakamı" dedik de, "*x* sayısı" demedik diye sorulacaktır. Buna yanıt, daha önce tartışılan bir ayrıma, matematikle üst-matematik arasındaki ayrıma bağlıdır; ve sayılarla rakamlar arasındaki farkla ilgili kısa bir

Gödel'in sub fonksiyonu bir ilksel yinelgen fonksiyon olarak verildiğinde, PM'nin içinde onu tam olarak yansıtabilecek biçimsel deyimler bulunur;[15] bu deyimi 'Sub (*x*, 17, *x*)' ile kısaltarak, daha önce yapmış olduğumuz gibi biçimsel olmayan aritmetiksel kavramla, onun biçimsel tipografik karşılığı arasındaki önemli ayrıma (yani sırasıyla küçük harfle gösterilenle büyük harfle gösterilen ayrıma) işaret edeceğiz. Akılda tutulmalıdır ki, 'sub (243.000.000, 17, 243.000.000)' bir *sayıyı* (yani, bir büyüklüğü veya niceliği) gösterirken,[16]

---

açıklamayı gerektirir. Bir *rakam*, yazabileceğimiz, silebileceğimiz, kopyalayabileceğimiz vb. bir imdir, bir dilsel ifadedir. Öte yandan, *sayı*, rakamın adlandırdığı veya gösterdiği şeydir; yazılamaz, silinemez, kopyalanamaz vb. Parmaklarımızın sayısı ondur derken, parmaklarımızın sınıfına belli bir "özellik" atfederiz; ama bu özelliğin bir rakam olduğunu söylemek saçmalık olacaktır. Yine, on sayısı, Arap rakamı olan '10' ile adlandırıldığı gibi Romen rakamı 'X' ile de adlandırılabilir; bu adlar, aynı sayıyı adlandırsalar da, farklıdırlar. Kısaca, sayısal bir değişken (harf ya da im) için bir yerine koyma yaptığımızda, bir imin yerine bir diğerini koyuyoruzdur. Bir sayının yerine bir im koyamayız, çünkü bir sayı bir *kavram*dır (ve bazen söylendiği gibi kümelerin soyut bir özelliğidir), kağıda yazacağımız bir şey değil. Bundan da şu sonuç çıkar ki, bir tamdeyimde bir sayısal değişkenin yerine sadece bir rakam ('0 × 0' veya 'ss0 + sss0' gibi diğer sayısal ifadeler) koyabiliriz, bir sayı değil. Bu da, sub fonksiyonunun üst-matematiksel nitelendirmesinde, '*y*' değişkeninin yerine niye *x sayısının* kendisini değil de, *x rakamını* koyduğumuzu söylediğimizi açıklamaktadır. Böyle bir dilsel hassasiyet konusunda çaba göstermemize rağmen, bir tamdeyimdeki bir değişkenin yerine rahatlıkla bir sayı koyduğumuzdan söz edebiliriz; bazen böyle gevşek bir tarzda konuşmak gerçekten açık da olabilir.

15 Aslında, Karşılıklılık Lemmasının uygulandığı sub fonksiyon değil, '*z* = sub (*x*, 17, *x*)' yüklemidir; ancak bu ayrım, bir dipnot olmanın ötesinde bir ayrıntıyı hak etmemektedir. Bu ayrıntı, 17. dipnotta işaret edilen konuyla da bağlantılıdır.

16 Okurun yanıtlanmasını istediği bazı sorular olabilir. Örneğin Gödel sayısı x olan tamdeyim, Gödel sayısı 17 olan değişkeni içermiyorsa, yani eğer tamdeyim 'y' değişkenini içermiyorsa, 'sub (*x*, 17, *x*)' ile hangi sayının gösterildiğini okur merak edebilir. Bu durumda sub (243.000.000, 17, 243.000.000), Gödel sayı-

'Sub (243.000.000, 17, 243.000.000)', PM içindeki bir *zinciri* göstermektedir. Her ne kadar bu zincir anlam içermese de (PM'nin veya herhangi bir başka biçimsel dizgenin zincirleri gibi), onların anlama sahip olduklarını düşünmek uygun olacaktır, çünkü bazı aritmetiksel hesaplamaların biçimsel temsilcisi gibi işlev görmektedir, tıpkı "anlam içermeyen" 'ss0 + ss0' zincirinin, PM içinde, "iki artı iki" gibi basit bir hesaplamanın (ve dolaylı yoldan olsa da "dört" kavramının) biçimsel temsilcisi olarak işleve sahip olması gibi.[17]

---

sı 243.000.000 olan tamdeyimden, '*y*' değişkeninin yerine 'sss.... sss0' (243.000.000 tane 's' içeriyor) rakamı konularak elde edilen tamdeyimin Gödel sayısıdır. Ancak okur Çizelge 4'ü incelediğinde 243.000.000 sayısının '0 = 0' tamdeyiminin Gödel sayısı olduğunu görecektir, oysa bu tamdeyim '*y*' değişkenini içermemektedir. Öyleyse, '*y*' değişkeni yerine 243.000.000 rakamı konularak '0 = 0'dan elde edilen tamdeyim nedir? Buna verilecek basit yanıt şudur: '0 = 0' bu değişkeni içermediğinden, hiçbir yerine koyma yapılamaz, ya da '0 = 0'dan elde edilen tamdeyim, bu tamdeyimin yine kendisidir ki, bu da aynı anlama gelir. Buna göre 'sub (243.000.000, 17, 243.000.000)'le gösterilen sayı 243.000.000'dir.

17 Okur, tıpkı '$(\exists x)$ $(x = sy)$'nin, 's0 = sss0'ın veya 'Dem (x, z)'in tamdeyim olmaları gibi, 'Sub $(x, 17, x)$'nin de PM'nin bir tamdeyimi olup olmadığını sorabilir. Yanıt, aşağıdaki nedenlerden ötürü, hayırdır. 's0 = sss0' zinciri bir tamdeyimdir, çünkü iki sayı arasında bir bağıntının olduğunu iddia etmektedir ve bu yüzden de doğruluk veya yanlışlık anlamlı bir şekilde ona yüklenebilir. Benzer şekilde, 'Dem (x, z)'deki değişkenlerin yerine belirli rakamlar konulduğunda, bu tamdeyim, iki sayı hakkında aritmetiksel bir önerme ifade etmekte ve bu nedenle de doğru ya da yanlış bir önerme olabilmektedir. Aynı şey '$(\exists x)(x = sy)$' için de geçerlidir. Öte yandan, 'Sub $(x, 17, x)$'deki *x*'nin yerine belirli bir rakam koyduğumuzda, ortaya çıkan sonuç bir bildirimde bulunmaz, dolayısıyla da doğru veya yanlış olamaz. Bu sebeple, 'Sub $(x, 17, x)$' bir tamdeyim değildir. Tıpkı 'ss0 × sssss0' zinciri gibi, bir sayıyı gösterir veya adlandırır; bunu, o zinciri diğer sayıların belirli bir fonksiyonu olarak betimleyerek yapar.

C. GÖDEL'İN USLAMLAMASININ ÖZÜ

Sonunda Gödel'in asıl uslamlamasını ana hatlarıyla izleyebilecek donanıma sahip olduk. Basamakları genel bir biçimde sıralamakla işe başlayacağız, böylece okur diziyi kuş bakışı görme olanağına sahip olacaktır.

Gödel, *(i)* PM'ye ait olan ve 'G tamdeyimi PM'nin kurallarını kullanarak kanıtlanabilir değildir' üst-matematiksel önermesini temsil edecek bir G tamdeyiminin nasıl inşa edilebileceğini gösterdi.[18] Bu tamdeyim açıkça *kendisinden* söz ederek kanıtlanabilir olmadığını ifade etmektedir. Bir noktaya kadar G, Richard Paradoksuna benzer bir şekilde inşa edilmiştir. Bu paradoksta 'Richardcı' deyimi belli bir *n* sayısına karşılık geliyordu ve '*n* Richardcıdır' tümcesi inşa edilmişti. Gödel'in uslamlamasında da, G tamdeyimine bir *g* sayısı (yani onun Gödel sayısı) karşılık gelmektedir ve bu tamdeyim '*g* sayısına karşılık gelen tamdeyim kanıtlanabilir değildir'e karşılık gelecek bir biçimde inşa edilmiştir.

Ancak Gödel, *(ii)* ayrıca G'nin, yalnız ve yalnızca onun biçimsel değillemesi olan ~G kanıtlanabilir ise, kanıtlanabileceğini göstermiştir. Uslamlamadaki bu basamak da, *n*'nin yalnız ve yalnızca Richardcı değilse Richardcı olacağını söyleyen Richard Paradoksundaki basamağa benzerdir. Ancak bir tamdeyimin hem kendisi, hem de onun değillemesi biçimsel olarak kanıtlanabilir ise PM tutarlı değildir. Buna göre, PM tutarlıysa, ne G ne de ~G aksiyomlardan biçimsel olarak türetilebilir. Dolayısıyla, eğer PM tutarlıysa, G *biçimsel olarak karar verilemeyen* bir tamdeyimdir.[19]

---

18 Bundan sonra, "kanıtlanabilir" ifadesini herhangi bir niteleme eklemeksizin her yazdığımızda, bundan her zaman "PM'nin kurallarını kullanarak kanıtlanabilir" anlaşılmalıdır (bu, "PM'nin bir teoremidir" ile eşanlamlıdır).

19 Bir X tamdeyiminin, Gödel'in makalesinin başlığında olduğu gibi "biçimsel olarak karar verilemeyen" (ya da kısaca "karar verilemeyen") olduğunu öne sürmek, ne X'in ne de onun değillemesi olan ~X'in söz konusu biçimsel dizge içinde (yani makalenin başlığında sözü edildiği gibi "PM veya benzeri dizgeler" içinde) kanıtlaması olduğu anlamına gelir.

Gödel daha sonra gösterdi ki, *(iii)* her ne kadar G biçimsel olarak kanıtlanabilir değilse de, *doğru* bir aritmetik tamdeyimidir (11. dipnottaki "gevşek konuşma" hakkındaki açıklamaya bakınız). G tamdeyimi, Gödel tarafından tanımlanan bazı aritmetiksel özelliklere sahip hiçbir tamsayının olmadığını öne sürmesi anlamında doğrudur; gerçekten de, Gödel'in gösterdiği gibi bu özelliğe sahip bir tamsayı yoktur. Basamak *(iv)*'te, G'nin hem doğru olduğu, hem de (PM içinde) biçimsel olarak karar verilebilir olmadığı için, PM'nin *eksikli olması* [*tam olmaması*] gerektiği anlaşılmıştır. Başka bir deyişle, tüm aritmetiksel doğrulukları PM'nin kurallarından ve aksiyomlarından çıkarımlayamayız. Ayrıca Gödel, PM'nin *özsel olarak* da tam olmadığını ortaya koymuştur; yani, PM'ye, doğru G tamdeyimini yeni aksiyom kümesinden türetilebilecek biçimde ek aksiyomlar (ve kurallar) katılsa bile, başka bir doğru G′ tamdeyimini bir önceki durumda olduğu gibi inşa etme olanağı vardır ve G′ bu yeni dizgede yine biçimsel olarak karar verilemeyecek bir tamdeyim olacaktır. G′ tamdeyiminin de türetilmesine olanak verecek şekilde yapılacak yeni düzenleme ve eklemelerin bir başka doğru olan ama karar verilemeyen G″ tamdeyimine yol açacağını ve bunun böylece sonsuza kadar gideceğini söylemeye gerek bile yok. İşte "özsel olarak eksikli olmak" tam da bu demek.

Daha sonra *(v)* Gödel, 'PM tutarlıdır' üst-matematiksel önermesini temsil edecek PM'ye ait bir A tamdeyiminin nasıl inşa edilebileceğini betimledi; ve 'A → G' tamdeyiminin PM içinde biçimsel olarak kanıtlanabilir olduğunu gösterdi. Son olarak, A tamdeyiminin PM içinde kanıtlanabilir olmadığını gösterdi. Bundan çıkan sonuç ise şudur: PM'nin tutarlılığı, PM'nin bizzat kendisinin oluşturmuş olduğu biçimsel akıl yürütme dizgesi içinde yansıtılabilecek şekildeki bir mantıksal akıl yürütme zinciri ile ortaya konamaz.

Gödel'in, ulaştığı sonuçların genelliğine büyük önem verdiğine işaret etmek gerekir; bu sebepten makalesinin başlığında ulaştığı sonuçların sadece Russell ve Whitehead'in ünlü biçimsel dizgesi için değil, aynı zamanda "benzeri dizgeler" için de geçerli olduğunu altını çizerek belirtmişti. Makalesinin sonunda şunları yazmıştır: "Bu çalışma boyunca görünüşte

kendimizi PM dizgesiyle sınırlamış olduk ve bunun, diğer dizgelere de uygulanabileceğine sadece işaret ettik. Bu sonuçlar, çalışmamızın daha sonra yayımlanacak kısımlarında daha büyük bir genellik içinde ifade edilecek ve kanıtlanacaktır." Aslında Gödel, makalesinin şok edici sonucundan dolayı birçok kişinin onun geçerliliğinden kuşku duyacağından kaygı duyuyordu ve akıl yürütmesini daha sonraki çalışmalarla desteklemek niyetindeydi. Ancak makale öylesine ikna edici bir şekilde yazılmıştı ki, ulaştığı sonuçlar kolaylıkla kabul gördü ve dolayısıyla ona eklemeler yapma düşüncesini gereksiz kıldı. Şu hususun altını çizmek önemlidir ki, Gödel'in ulaştığı sonuçlar PM dizgesinin bazı kusurlarından kaynaklanmıyordu; bu sonuçlar toplama ve çarpmayı da kapsayacak şekilde sayal sayıların aritmetiksel özelliklerini içeren *herhangi* bir dizgeye uygulanabilirdi.

Şimdi uslamlamanın esasını daha ayrıntılı olarak verelim:

(i) 'Dem (*x*, *z*)' tamdeyimi daha önce tanımlanmıştı. '*x* Gödel sayılı tamdeyimler dizisi, *z* Gödel sayılı tamdeyimin kanıtlamasıdır' üst-matematiksel önermesi, PM içinde bu tamdeyim tarafından temsil edilir. Şimdi, bir tikel niceleyiciyi bu tamdeyimin önüne ekleyelim: '(∃*x*) Dem (*x*, *z*)'. Bu tamdeyimin yorumu ise şöyledir: 'Öyle bir x vardır ki, *x* Gödel sayılı tamdeyimler dizisi, *z* Gödel sayılı tamdeyimin kanıtlamasıdır'. Kısaca, '*z* Gödel sayılı tamdeyim kanıtlanabilir'. (Bu bağlamda 'kanıtlama' ve 'kanıtlanabilir' terimlerinin her zaman PM biçimsel dizgesine gönderdiğini hatırlatıyoruz).

Şimdi, bu tamdeyimin önüne tilde'yi ekleyerek onun biçimsel değillemesini elde ediyoruz: '~(∃*x*) Dem (*x*, *z*)'. Bu tamdeyim, PM içinde aşağıdaki üst-matematiksel önermenin biçimsel yorumunu oluşturur: '*z* Gödel sayılı tamdeyim kanıtlanabilir değildir', ya da başka bir deyişle, '*z* Gödel sayılı tamdeyime ilişkin hiçbir kanıtlama yapılamaz'.

Gödel'in yaptığı, bu tamdeyimin bazı özel durumlarının biçimsel olarak kanıtlanamaz olduğunu göstermek olmuştur. Bu özel durumu inşa etmek için (1)'de gösterilen tamdeyimle işe başlayalım:

(1) $\sim (\exists x)$ Dem $(x$, Sub $(y, 17, y))$

Bu tamdeyim PM'ye aittir, ama üst-matematiksel bir yoruma sahiptir. Şimdi soru "hangisini"dir ? Okur, 'Sub $(y, 17, y)$' deyiminin bir sayıyı gösterdiğini anımsamalıdır. Bu sayı, Gödel sayısı y olan tamdeyimden, Gödel sayısı 17 olan değişkenin yerine (yani '*y*' harfinin her geçişinde onun yerine) *y*'nin rakamı konularak elde edilen tamdeyimin Gödel sayısıdır.[20] Artık (1)'deki tamdeyimin 'Gödel sayısı sub $(y, 17, y)$ olan tamdeyim kanıtlanabilir değildir' üst-matematiksel önermesini temsil ettiği açıktır. Bu önerme çok umut vaat eder gözükse de, hâlâ açık uçlu ve belirsizdir, çünkü '*y*' değişkenini içermeye devam etmektedir. Onu belirli kılmak için, değişkenin yerine bir rakam koymamız gerekir. Hangi rakamı seçmemiz gerekir? Burada Gödel'i izleyeceğiz.

(1)'deki tamdeyim, PM'ye ait olduğundan, onun ilkece hesaplanabilir (acayip büyük) bir Gödel sayısı vardır. Neyse ki bunu hesaplamayacağız, zaten Gödel de hesaplamamıştı ; bu sayının değerini '*n*' harfiyle göstereceğiz. Şimdi (1) tamdeyimindeki '*y*' değişkeninin yerine *n* sayısını koyalım (daha doğrusu *n* sayısının rakamını koyalım; tıpkı 17 yazarken aslında 'sssssssssssssssss0'yi kastettiğimiz gibi) . Bu yeni tamdeyime Gödel'e atfen "G" diyelim; G aşağıdaki biçimi alacaktır:

(G) $\sim(\exists x)$ Dem $(x$, Sub $(n, 17, n))$

G tamdeyimi sözünü ettiğimiz tamdeyimdir. (1)'deki tamdeyimden elde edildiği için üst-matematiksel anlamı basitçe: 'sub $(n, 17, n)$ Gödel sayılı tamdeyim kanıtlanabilir

---

[20] 'Sub $(y, 17, y)$' PM içinde bir deyim olsa da, bir tamdeyim olmadığını, ama bir sayıyı ayırt ederek belirlemek [*identify*] için bir ad-fonksiyonu olduğunu görmek çok önemlidir (bkz. dipnot 17). Bu şekilde belirlenen sayı, bir tamdeyimin Gödel sayısıdır ya da Gödel sayısı olabilirdi, eğer '*y*' bir değişken olmasaydı. '*y*' bir rakam değil, bir değişken olduğu için 'Sub $(y, 17, y)$' deyimi, belirli bir sayıyı temsil etmez, tıpkı '*y* + sss0' zincirinin temsil etmediği gibi. Bunun olabilmesi için '*y*' değişkeninin yerine belirli bir rakam koymak gerekir.

değildir'dir. Şimdi artık (nicelikselleştirilmemiş) hiçbir değişken kalmadığına göre, G'nin anlamı belirlenmiştir

G tamdeyimi PM içinde bulunmuştur, dolayısıyla onun bir *g* Gödel sayısı olması gerekir. *g*'nin değeri nedir? Biraz düşününce bunun *g* = sub (*n*, 17, *n*) olduğunu görürüz.[21] Bunu görmek için sub (*n*, 17, *n*)'nin, Gödel sayısı yine *n*'nin kendisi olan tamdeyimin içinde, Gödel sayısı 17 olan değişkeninin (yani '*y*' değişkeninin) yerine *n* rakamı konarak elde edilen tamdeyimin Gödel sayısı olduğunu anımsamalıyız. Ancak G tamdeyimi tam da bu şekilde elde edilmişti! Yani Gödel sayısı *n* olan tamdeyimle başladık; sonra onda geçen '*y*' değişkeninin yerine *n*'nin rakamını koyduk. Demek ki, G'nin Gödel sayısı aslında sub (*n*, 17, *n*)'dir.

Ancak G tamdeyiminin, aynı zamanda, "Gödel sayısı *g* olan tamdeyim kanıtlanabilir değildir" üst-matematiksel önermesinin PM *içindeki* yansımalı resmi olduğunu anımsamalıyız. Bundan çıkan sonuç, G'nin PM içinde şu üst-matematiksel önermeyi temsil ettiğidir: 'G tamdeyimi kanıtlanabilir değildir'. Başka bir deyişle, PM'nin tamdeyimi olan G, bizzat kendisinin PM'nin bir teoremi olmadığını öne süren bir tamdeyim olarak anlaşılabilir.

(ii) Şimdi bir sonraki basamağa geldik, yani G'nin aslında PM'nin bir teoremi olmadığının kanıtlanmasına. Gödel'in uslamlaması Richard Paradoksunun gelişimine benziyor, ama onun akıl yürütmesindeki garipliklerden uzak duruyor.[22]

---

21 Sayının kendisiyle, onun PM içindeki biçimsel karşılığı arasındaki farka dikkat edelim. Sayının kendisi, küçük harf 's' ile yazılan sub (*n*, 17, *n*) ile, biçimsel karşılığı ise büyük harf 'S' ile kısalttığımız şu zincirle ifade edilmiştir: 'Sub (*n*, 17, *n*)'. Başka bir deyişle, 'sub (*n*, 17, *n*)', tıpkı biçimsel olmayan aritmetiksel ifade '2 × 5'in bir *niceliği* (yani on) göstermesi gibi, bir *niceliği* göstermektedir; buna karşılık 'Sub (*n*, 17, *n*)', PM içinde sayı-adlandıran bir zinciri göstermektedir, 'ss0 × sssss0' sayı-adlandıran zinciri gibi.

22 Burada kullanılan uslamlamanın, Richard Paradoksunda kullanılanla benzerliğini ve ayrılıklarını belirtik kılmak yararlı olacaktır. Dikkat edilmesi gereken en önemli nokta, G tamdeyiminin ona karşılık gelen üst-matematiksel önermeyle özdeş olmadığı,

Uslamlama görece daha külfetsizdir. Şunu göstermektedir: Eğer G tamdeyimi kanıtlanabilir olsaydı, onun biçimsel değillemesi olan tamdeyim de (yani '($\exists x$) Dem (x, Sub (n, 17, n))' tamdeyimi ki, yorumu şöyledir: 'PM içinde G'nin bir kanıtlaması vardır') kanıtlanabilir olacaktı; ve bunu tersinden söylersek, eğer G'nin biçimsel değillemesi kanıtlanabilir olsaydı, G'nin kendisi de kanıtlanabilir olacaktı. Dolayısıyla, G kanıtlanabilirdir yalnız ve yalnızca ~G kanıtlanabilir ise.[23]

---

ancak onu PM içinde *temsil ettiğidir* (ya da yansıttığıdır). Richard Paradoksunda *n* sayısı, belirli bir üst-matematiksel deyime karşılık gelen sayıdır. Gödel'in çalışmasında ise, *n* sayısı PM'ye ait belirli bir *tamdeyime* karşılık gelmektedir ki, aslında bu tamdeyim bir *üst-matematiksel* önermeyi temsil etmektedir. Richard Paradoksunda *n* sayısının Richardcı olma *üst-matematiksel* özelliğini taşıyıp taşımadığı sorusu sorulmuştu. Gödel'in yaptığı inşada soru, g = sub (n, 17, n) sayısının belirli bir *aritmetiksel* özellik taşıyıp taşımadığı, yani 'dem (x, g)' bildiriminin, x ne olursa olsun hiçbir sayal sayı için geçerli olmadığı özelliğini taşıyıp taşımadığıdır. Dolayısıyla Gödel'in yaptığı inşada, aritmetiğin *içindeki* önermelerle, aritmetik hakkındaki önermeler arasında bir karışıklık yoktur. Ama böyle bir karışıklık Richard Paradoksunda vardır.

23 Aslında Gödel'in kanıtladığı bu değildir; kitaptaki önerme J. Barkley Rosser'in 1936'da ortaya koyduğu bir teoremin, burada sunuşun basitliğini sağlamak amacıyla yapılmış bir uyarlamasıdır. Gödel'in asıl gösterdiği şudur: Eğer G kanıtlanabilir ise, demek ki ~G kanıtlanabilirdir (öyleyse PM tutarsızdır); öte yandan eğer ~G kanıtlanabilir ise, demek ki PM ω-tutarsızdır.

ω-tutarsızlık nedir? 'P' herhangi bir aritmetiksel yüklem olsun. Şimdi bir biçimsel hesap C, ω-tutarsızdır, eğer C'nin içinde hem '($\exists x$) P(x)' (yani, "P özelliğine sahip en az bir sayı vardır") tamdeyimini kanıtlamak, hem de '~P(0)', '~P(s0)', '~P(ss0)' vb. gibi (yani, "0, P özelliğine sahip değildir", "1, P özelliğine sahip değildir", "2, P özelliğine sahip değildir" gibi) sonsuz tamdeyimler kümesinden her birini kanıtlamak olanaklı ise. Kısa bir değerlendirici düşünme, eğer C tutarsız ise, aynı zamanda ω-tutarsız olduğunu da gösteriyor (çünkü tutarsız bir dizge içinde *tüm* zincirler teoremdir); ancak bu çıkarım ters yönde tutmuyor, yani C tutarsız olmadan da ω-tutarsız olabilir. Başka bir deyişle, sadece '($\exists x$) P(x)' değil, yukarıda geçen tamdeyimlerden her biri C'nin teoremleri olabilir; öte yandan '~($\exists x$) P(x)' teorem olmayabilir, bu

Ancak daha önce işaret ettiğimiz gibi, eğer bir tamdeyimin hem kendisi, hem de onun biçimsel değillemesi bir biçimsel hesabın içinde türetilebilir ise, bu biçimsel hesap tutarlı değildir. Bunu diğer yönden ifade edersek, eğer PM tutarlı bir biçimsel hesap ise, ne G tamdeyimi ne de onun değillemesi kanıtlanabilir. Kısaca, eğer PM tutarlıysa, G zorunlu olarak karar verilebilir değildir.[24]

---

durumda C tutarsız olmadan ω-tutarsız olacaktır.

'~(∃*x*) P(*x*)'in teorem olmadığı halde, '~P(0)', '~P(s0)' vb ailesinden her bir üyenin teorem olması saçma gözükebilir. Sonuçta, bu aile hiçbir sayının P özelliğine sahip olmadığını *topluca* söylerken, '~(∃*x*) P(*x*)' hiçbir sayının P özelliğine sahip olmadığını *tek başına* iddia ediyordu. Sonuncusu ilkinden doğrudan çıkmıyor mu? Ve *bazı* sayıların P özelliğine sahip olduğunu iddia eden '(∃*x*) P(*x*)' nasıl teorem olabiliyordu? Bu aileyle doğrudan çelişen bir şey değil miydi? Her iki kaygı da (her insan gibi) *anlamı* dikkate aldığımızda haklı görünüyor; ancak C sadece biçimsel bir dizgedir, onun bağlantılı olduğu şey sadece çıkarım kurallarıdır, anlam değil. Eğer herhangi bir kural, tek bir hamlede tüm aileyi kapsasaydı, kaygı haklı olabilirdi –ancak her ne kadar bir kural herhangi *sonlu* sayıda tamdeyimleri ilgilendirse de, hiçbir kural *sonsuz* sayıda tamdeyime atıfta bulunmaz. (Bölüm III'te Hilbert'in sonlayıcı yöntemler konusundaki ısrarını hatırlayın.) Bu tür durumlar, ne kadar acayip olurlarsa olsunlar, ortaya çıkabilir.

24 Gödel'in uslamlamasının ilk kısmının bir özetini verdik, yani eğer G kanıtlanabilir ise, demek ki ~G kanıtlanabilirdir. Şimdi G tamdeyiminin kanıtlanabilir olduğunu varsayalım. Bu, aritmetiğin içinde *G'nin kanıtlamasını oluşturacak bir tamdeyimler dizisi vardır* anlamına gelecektir. Bu üst-matematiksel önermeyi, sayısal olana çevirelim. Bu varsayılan kanıtlamanın Gödel sayısı k olsun. dem (*x*, *z*) bağıntısı, "bu, şunun kanıtlamasıdır"ın sayıkuramsal karşılığı olduğundan, dem (*x*, *z*), *x*'in değeri k olduğunda ve z'nin de değeri G Gödel sayısı olduğunda, doğru olmalıdır. Başka bir deyişle dem (*k*, sub (*n*, 17, *n*)) aritmetiğin bir olgusudur. Ama dem (*x*, *z*) ilksel yinelgen bir bağıntı olarak verildiğinde (bunun böyle olduğunu kabul ettik), onun PM içindeki karşılığı öyle davranmaktadır ki, 'Dem (sss...sss0, Sub (sss...sss0, sss...sss0, sss...sss0))' , PM'nin bir teoremi olmalıdır; burada 's'lerin tekrar etme adedi sırasıyla *k*, *n*, 17 ve *n*'dir. Sonuç olarak, 'Dem (*k*, Sub (*n*, 17, *n*))' bir teorem olmalıdır. Ancak, 'P(*k*)' biçimindeki bir teoremden (*k* sayısı P özelliğine sahiptir), '(∃*x*) P(*x*)' teoremi-

(iii) Bu sonuç ilk bakışta çok büyük öneme sahipmiş gibi gözükmeyebilir. Karar verilemez bir tamdeyimin PM'nin içinde inşa edilebilmesi niye bu kadar dikkat çekici diye sorulabilir. Bu noktada, bu sonucun derin izdüşümlerini aydınlatacak bir sürpriz sırada beklemekte. Çünkü, her ne kadar G tamdeyimi, eğer PM tutarlı ise, karar verilebilir değildir ama, *üst-matematiksel* usavurmayla gösterilebilir ki, G *doğrudur.* (Kuşkusuz ya G ya da ~G doğru olmalıdır, çünkü bunlar, sayılar dünyası hakkında iki karşıt bildirimde bulunmaktadırlar; bu bildirimlerden biri doğru olmalı, diğeri de yanlış olmalıdır. Sorun hangisinin doğru, hangisinin yanlış olduğudur).

G'nin, doğru bir bildirimde bulunduğu rahatlıkla görülebilir. Daha önce gördüğümüz gibi G'nin söylediği şudur: 'PM içinde G'nin bir kanıtlaması yoktur' (Bu, en azından G'nin *üst-matematiksel* yorumudur; sayı-kuramsal düzeyde okunduğunda ise G şunu söylemektedir: Belirli bir bağıntıyı, yani 'dem' bağıntısını, sub (*n*, 17, *n*) sayısına bağlayan bir *x* sayısı yoktur. G'nin doğru olduğuna kendimizi ikna edebilmek için, ilk yorumu dikkate almak yeterlidir). Ama daha önce göstermiştik ki G, PM içinde *karar verilebilir değildir,* dolayısıyla G'nin PM içinde *bir kanıtlaması yoktur.* Ancak şimdi G'nin ne iddia ettiğini hatırlayın! Demek ki G doğru olanı iddia etmektedir. Okur şu hususa dikkat etmelidir ki, biz bir sayı-kuramsal doğruluğu, onu biçimsel dizgenin aksiyomlarından ve kurallarından biçimsel olarak çıkarımlayarak değil, üst-matematiksel bir uslamlamayla ortaya koyduk.

(iv) Şimdi okuyucuya önermeler mantığını tartışırken

---

ni (bazı sayılar P özelliğine sahiptir) türetebileceğimizi söyleyen PM'nin çıkarım kuralı yardımıyla, '(∃*x*) Dem (*x*, Sub (*n*, 17, *n*))' teoremini türetebiliriz. Ama bu, G'nin biçimsel değillemesidir. Böylece, eğer G tamdeyimi kanıtlanabilir ise, onun biçimsel değillemesinin de kanıtlanabilir olduğunu göstermiş oluyoruz. Buradan çıkan sonuç şudur: Eğer PM tutarlı ise, G tamdeyimi onun içinde kanıtlanabilir değildir.

Eğer ~G tamdeyimi kanıtlanabilir ise PM'nin ω-tutarsız olduğunu göstermek için, oldukça benzer ama biraz daha karmaşık bir uslamlama gerekmektedir. Burada onu vermeyeceğiz.

sözünü ettiğimiz "tamlık" kavramını anımsatacağız. Daha önce ifade edilmişti ki, bir tümdengelimli dizge, ancak dizge içinde ifade edilebilen her doğru önerme aksiyomlardan çıkarım kuralları aracılığıyla biçimsel olarak çıkarımlanabiliyorsa, "tamlığa" [eksiksizliğe] sahiptir. Eğer durum böyle değilse, yani dizge içinde ifade edilebilen her doğru önerme aksiyomlardan biçimsel olarak çıkarımlanamıyorsa, dizge "tam" değildir. Ancak G'nin, PM'nin içinde biçimsel olarak çıkarımlanamayan bir doğru PM tamdeyimi olduğunu ortaya koyduğumuzdan, buradan PM'nin tam olmayan bir dizge olduğu sonucu çıkıyor –tabii ki PM'nin tutarlı olduğu varsayılarak.[25]

Üstelik PM'nin başı, ilk bakışta göründüğünden çok daha fazla derttedir, çünkü PM *özsel olarak* da "tam" değildir: G, bir aksiyom olarak diğerlerine eklense bile, yeni aksiyom kümesi yine de tüm aritmetiksel doğrulukları biçimsel olarak vermeye yetmeyecektir. Çünkü, eğer başlangıç aksiyomları yukarıda söz edildiği gibi artırılsa bile, bu yeni dizgenin içinde de bir başka doğru, ama karar verilemeyen bir tamdeyim inşa etmek olanaklı olacaktır. Bu tamdeyim, nispeten daha karmaşık bir sayı-kuramsal bağıntı içerecektir –diyelim dem' (*x*, *z*)– çünkü yeni dizge ek bir aksiyom daha içereceğinden, yeni dizgedeki "kanıtlanabilirlik" kavramı, PM'ninkinden biraz daha karmaşık olacaktır. Yeni dizgeye ait olan karar verilemeyen tamdeyim, Gödel'in PM'deki doğru, ama karar verilemeyen tamdeyimi belirlerken kullandığı reçeteyi taklit ederek inşa edilecektir. Karar verilemeyen tamdeyimleri üreten bu

---

25 Bu sonuca, *(iii)*. basamaktaki akıl yürütmeye başvurmadan da –yani G ve ~G'den hangisinin doğruyu ifade ettiğini bilmeden de– ulaşabilirdik, çünkü G'nin karar verilebilir olmadığı, yani ne G'nin ne de ~G'nin PM içinde kanıtlanabilir olmadığı sonucuna daha önce varmıştık. Bu tamdeyimlerden birinin bir doğruluğu ifade etmesi *gerektiği* durumu ve bu iki tamdeyimin de PM içinde kanıtlanabilir olmaması, G veya ~G'den hangisinin suçlu olduğunu bilmesek de, zaten PM'nin tam olmadığı anlamına geliyordu. Belki bu tamdeyimlerden hangisinin suçlu olduğunu bilmek daha rahatlatıcıdır, ama bu, uslamlamanın gerekli öğelerinden biri değildir.

yöntem, başlangıçtaki dizge ne kadar genişletilirse genişletilsin, işletilebilir. Bu durum, Russell ve Whitehead'in biçimsel hesabı PM'nin özelliklerine bağlı bir şey de değildir. Bu yöntem, hangi dizgeyi başlangıç noktası alırsak alalım, elimizdeki dizge tümüyle biçimsel olduğu ve toplama ve çarpmayı da dahil ederek tam sayıların temel özelliklerini kapsayan aksiyomları içerdiği sürece işleyecektir.

Dolayısıyla biçimsel aksiyomatik akıl yürütmenin gücünde temel bir sınırlılık olduğunu onaylamak durumunda kalıyoruz. Daha önceki varsayımların aksine, uçsuz bucaksız aritmetiksel doğruluk âlemi, belirli bir aksiyom ve çıkarım kuralları kümesini ilk ve son kez belirlemek suretiyle, *her* doğru aritmetiksel önermenin biçimsel olarak onlardan türetilebileceği dizgesel bir düzen içinde tesis edilemez. Matematiğin özünün saf biçimsel aksiyomatik akıl yürütme olduğuna inanma eğilimindeki herkes için bu, şok edici bir hakikattir.

(v) Artık Gödel'in olağanüstü zihinsel senfonisinin koda bölümüne, bitiş bölümüne geldik. 'Eğer PM tutarlıysa, PM tam değildir' üst-matematiksel önermesinin temellendirildiği basamaklar tek tek geçildi. Ancak, bu koşullu önermenin *bir bütün olarak alındığında*, PM içinde *kanıtlanabilir* bir tamdeyim tarafından temsil edildiği de gösterilmişti.

Bu çok önemli tamdeyim kolayca inşa edilebilir. Bölüm V'te açıkladığımız gibi, 'PM tutarlıdır' üst-matematiksel önermesi, 'PM içinde kanıtlanamayan en az bir PM tamdeyimi vardır' önermesiyle eşdeğerdir. Gödel'in, üst-matematiği sayılar dünyasına haritalamasıyla bu tamdeyim şu sayıkuramsal bildirime karşılık gelmektedir: 'En az bir y sayısı vardır, öyle ki, hiçbir x, y ile dem bağıntısı içinde değildir'. Başka bir deyişle, 'Bazı y sayıları, hiçbir x için dem (x, y) bağıntısını sağlamayan özelliğe sahiptir.' Bu, PM'nin biçimsel notasyonuna aşağıdaki gibi aktarılabilir :

(A) $(\exists y) \sim (\exists x) \text{ Dem } (x, y)$

A'nın üst-matematiksel yorumunu yeniden ifade edelim: 'En az öyle bir [Gödel sayısı y olan] tamdeyim vardır ki, önerilen hiçbir [Gödel sayısı x olan] tamdeyimler dizisi, onun

PM içindeki kanıtlamasını oluşturmaz.'

Demek ki, A tamdeyimi, 'Eğer PM tutarlı ise, PM tam değildir' üst-matematiksel önermesinin önbileşen kısmını temsil etmektedir. Öte yandan, bu önermenin artbileşen kısmı, yani 'PM tam değildir', doğru olan ama kanıtlanabilir olmayan herhangi bir X tamdeyimi hakkında söylenebilecek olan, 'X, PM'nin bir teoremi değildir' ifadesine eşdeğerdir. Neyse ki, böyle bir X tamdeyimi biliyoruz, yani eski dostumuz G tamdeyimi. Böylece, aşağıdaki zinciri yazmak suretiyle, artbileşeni, PM'nin biçimsel diline çevirebiliriz: 'G, PM'nin bir teoremi değildir'. Bunu söyleyen de G'nin kendisinden başkası değildir. Böylece G, bizim koşullu üst-matematiksel önermenin artbileşen kısmı olarak kullanılabilir.

Şimdi tüm bunları bir araya getirirsek şu sonuca ulaşıyoruz ki, "Eğer PM tutarlıysa, PM tam değildir" koşullu önermesi PM içinde aşağıdaki tamdeyim tarafından temsil edilmektedir:

$$(\exists y) \sim(\exists x) \text{ Dem } (x, y) \rightarrow \sim(\exists x) \text{ Dem } (x, \text{Sub } (n, 17, n))$$

Bu tamdeyimi kısaca 'A → G' biçiminde simgeleştirebiliriz. (Bu tamdeyimin biçimsel olarak kanıtlanabilir olduğu gösterilebilir; ancak burada bunun kanıtlamasını vermeyeceğiz).

Şimdi A tamdeyiminin PM içinde kanıtlanabilir olmadığını göstereceğiz. Önce kanıtlanabilir olduğunu varsayalım. Madem ki 'A → G' kanıtlanabilirdir, dolayısıyla Ayırma Kuralı gereğince (V. Bölüm'ü hatırlayın) G de kanıtlanabilir olmalıdır. Ancak PM tutarsız olmadıkça, G biçimsel olarak karar verilebilir değildir, yani kanıtlanabilir değildir. Demek ki, eğer PM tutarlıysa, A tamdeyimi kanıtlanabilir değildir.

Bu bizi nereye götürür? A tamdeyimi, PM içinde 'PM tutarlıdır' üst-matematiksel önermesinin biçimsel ifadesidir. Demek ki, eğer bu üst-matematiksel önerme, belirli bir akıl yürütme zinciri tarafından *biçimsel olmayan bir şekilde* ortaya konabiliyorsa ve bu akıl yürütme zinciri PM içinde bir kanıtlamayı oluşturan bir tamdeyimler dizisiyle eşlenebiliyorsa [haritalanabiliyorsa], A tamdeyiminin kendisi PM içinde kanıtlanabilir olacaktır. Ancak bu, daha önce gördüğümüz gibi, eğer PM tutarlıysa olanaksızdır. Böylece son

büyük basamağa artık sıra gelmiştir: *Eğer* PM tutarlıysa, onun tutarlılığı PM'nin içinde temsil edilebilecek [ya da yansıtılabilecek] herhangi bir üst-matematiksel akıl yürütmeyle ortaya konamaz!

Gödel'in çözümlemesinin bu önemli sonucu yanlış anlaşılmamalı: Bu çalışma PM'nin tutarlılığının üst-matematiksel olarak kanıtlanmasını dışlamıyor. Onun dışladığı, PM'nin içinde yansıtılabilecek olan bir tutarlılık kanıtlamasıdır.[26]

PM gibi biçimsel dizgelerin tutarlılığını ortaya koyan üst-matematiksel uslamlamalar, aslında, Hilbert Okulunun bir üyesi olan Gerhard Gentzen tarafından 1936'da inşa edilmişti ve o tarihten sonra başkaları da bunu başardı.[27] Bu kanıtlamaların diğer sebepler yanında çok büyük mantıksal önemi vardır; çünkü yeni üst-matematiksel inşa biçimleri önermektedir ve böylelikle, eğer PM ve benzeri dizgelerin tutarlılığı ortaya konmak isteniyorsa, çıkarım kuralları kümesinin nasıl genişletilmesi gerektiği konusunu açık kılmaktadır. Ancak bu kanıtlamalar ilgili oldukları biçimsel dizgenin içinde temsil edilemezler ve sonlayıcı olmadıklarından da Hilbert'in özgün programında öne sürülen hedefleri sağlayamazlar.

---

26 Bu noktada, benzer şekilde, bir açının pergel ve cetvel kullanılarak üçe bölünemeyeceğinin kanıtlanmış olmasının, o açının hiçbir biçimde üçe bölünemeyeceği anlamına *gelmediğini* hatırlatmak okuyucuya yardımcı olabilir. Aksine, pergel ve cetvel kullanımına ek olarak, eğer cetvelin üzerine belli bir uzaklığın işaretlenmesine izin verildiği takdirde, bir açı üçe bölünebilir.

27 Gentzen'in kanıtlaması, PM içindeki tüm kanıtlamaları "basitlik" derecelerine göre çizgisel bir sıra halinde düzenlemeye dayanıyor (bir önceki bölümde sözü edilen Richard Paradoksuyla olan benzerliğe dikkat). Bu düzenleme bir örüntüyü ortaya çıkarıyor; bu örüntü "sonsuzötesi sıral" [*transfinite ordinal*] tiptedir. (Sonsuzötesi sıral sayılar kuramı On dokuzuncu yüzyılda Alman matematikçisi Georg Cantor tarafından yaratıldı.) Tutarlılığın kanıtlanması, bu çizgisel sıraya "sonsuzötesi tümevarım ilkesi" denilen bir çıkarım kuralı uygulayarak elde edildi. Gentzen'in uslamlaması, PM içinde yansıtılamaz. Üstelik, matematiksel mantık alanındaki birçok araştırmacı kanıtlamanın inandırıcılığını sorgulamasa da, bu kanıtlama, tutarlılığın mutlak kanıtlaması için Hilbert'in en baştaki saptaması anlamında sonlayıcı değildir.

VIII

Son Düşünceler

Gödel'in ulaştığı sonuçların önemi, her ne kadar henüz tümüyle anlaşılmamışsa da, çok geniş kapsamlıdır. Bu sonuçlar, her tümdengelimli dizge için (özellikle tüm aritmetiğin ifade edilebileceği dizgeler için) Hilbert'in önerisinin sonlu gereklerini sağlayan bir mutlak tutarlılık kanıtlamasının, mantıksal olarak olanaksız olmasa da, pek olası olmadığını ortaya koydular.[1] Ayrıca bu sonuçlar, herhangi bir aksiyom kümesinden belirli çıkarım kurallarıyla biçimsel olarak çıkarımlanamayacak sonsuz sayıda doğru aritmetik önermesi olduğunu da gösterdiler. Bu sonuçlardan sonra, örneğin sayılar kuramına aksiyomatik bir yaklaşımın, aritmetiksel doğruluk alanını tüketemeyeceği anlaşılıyor. Ayrıca, matematiksel kanıtlama sürecinden anladığımız şeyin, biçimselleştirilmiş aksiyomatik bir yöntemin kullanılmasıyla tam çakışmadığı da anlaşılıyor. Biçimselleştirilmiş aksiyomatik yöntem, başta belirlenen ve saptanan bir aksiyomlar kümesine ve dönüşüm kurallarına dayanır. Gödel'in kendi uslamlamasının gösterdiği gibi, matematikçilerin yeni kanıtlama kuralları konusundaki yaratıcılıklarına önceden hiçbir sınır getirilemez. Sonuç olarak, geçerli matematiksel kanıtlamaların kesin mantıksal biçimi hakkında son söz söylenemez. Bu koşulların ışığında, matematiksel veya mantıksal doğruluğun her şeyi kapsayan

---

[1] *Principia Mathematica* gibi bir biçimsel dizge için tutarlılığın sonlu bir mutlak kanıtlamasının inşa edilme olanağı Gödel'in sonuçları tarafından dışlanmış değildir. Gödel böyle bir kanıtlamanın *Principia Mathematica* içinde temsil edilemeyeceğini ortaya koymuştur. Onun uslamlaması, *Principia Mathematica* içinde temsil edilemeyen [yansıtılamayan] tam sonlu kanıtlamaları devre dışı bırakmıyor. Ancak bugüne kadar hiç kimse, *Principia Mathematica* içinde yansıtılması olanaklı *olmayan* bir sonlu kanıtlamanın ne olduğu konusunda açık bir fikre sahip görünmüyor.

bir tanımının oluşturulabileceği mi, yoksa, Gödel'in kendisinin de inandığı gibi, ancak Platoncu anlamda kapsamlı bir felsefi "gerçekçilik"in mi açık bir tanım sağlayacağı, bugün de tartışılmaya devam eden ve daha fazlasını burada ele almamızın olanak dışı olduğu sorunlardır.[2]

Gödel'in sonuçları, matematiksel zekâda insan beynine tam uygun olacak bir bilgisayarın yapılıp yapılamayacağı sorusunu da gündeme getiriyor. Bugünkü bilgisayarlar belirli bir komut kümesiyle çalışıyorlar; bu komutlar, biçimselleştirilmiş aksiyomatik yöntemdeki belirlenmiş çıkarım kurallarına karşılık geliyorlar. Yani, bilgisayarlar da sorunlara yanıt vermek için adım adım işlem yapıyorlar. Ancak Gödel, tam olmama teoreminde gösterdiği gibi, temel sayılar kuramında belirlenmiş aksiyomatik yöntemin alanının dışına düşen sayısız sorun bulunmaktadır; ve bu tür aletler, işleyişleri ne kadar karışık, dahice olursa olsun, işlemleri ne kadar hızlı yaparlarsa yapsınlar, bu sorunlara yanıt veremezler. Belirli

---

[2] Platoncu gerçekçilik, matematiğin "nesnelerini" yaratmadığını ya da icat etmediğini, ama onları Kristof Kolomb'un Amerika'yı keşfetmesi gibi keşfettiği görüşünü savunuyor. Eğer bu görüş doğruysa, bu nesneler keşfedilmelerinden önce, bir anlamda "var olmalılar". Platoncu öğretiye göre matematiksel çalışmanın nesneleri uzay-zaman içinde bulunmazlar. Onlar cisimden ayrılmış ebedi Biçimler [İdealar] veya İlkörneklerdir. Onlar ancak anlama yetisinin ulaşabileceği farklı bir âlemde yer almaktadır. Bu görüşe göre, duyularla algılanan fiziksel cisimlerin üçgensel veya çembersel şekilleri gerçek anlamda matematiksel nesneler değildirler. Bu şekiller, gözle görülemeyen yetkin "Üçgenin" ya da yetkin "Çemberin", yetkin olmayan cisimleşmiş durumlarıdır. Bu yetkin üçgen veya çember yaratılmış değildir, kendilerini hiçbir zaman maddi şeylerde tam olarak dışa vurmazlar ve yalnızca matematikçinin keşfedici zihni tarafından yakalanabilirler. Gödel şunları söylediğinde yukarıdakilere benzer bir görüşü savunmuş oluyor: "Kümeler ve kavramlar ... bizim tanımlarımızdan ve inşalarımızdan bağımsız olarak ... gerçek nesneler olarak kavranabilirler. Bana öyle görünüyor ki, böyle nesneleri varsaymak en az fiziksel cisimleri varsaymak kadar meşrudur ve onların varlıklarına inanmak için elimizde yeterince sebep vardır" (Kurt Gödel, "Russell's Mathematical Logic", *The Philosophy of Bertrand Russell* içinde (ed. Paul A. Schilpp, Evanston and Chicago, 1944), s. 137).

bir sorun için, bu tür bir alet o sorunun çözümü için inşa edilebilir; ancak her sorunu çözmek için de ayrı bir alet yapılamaz. İnsan beyni kendinde bazı sınırlılıklar taşıyor olabilir ve onun çözemeyeceği matematiksel sorunlar bulunabilir. Ancak durum böyle de olsa, insan beyni yapay zekânın yapısından çok daha güçlü bir işlem kuralları yapısına sahip gözüküyor. İnsan beyninin yerine robotları koymak gibi acil bir beklenti söz konusu değildir.

Gödel kanıtlamasının umutsuzluğa bir çağrı ya da gizem tacirliği için bir bahane olarak değerlendirilmemesi gerekir. Biçimsel olarak kanıtlanamayacak aritmetiksel doğrulukların olduğunun bulunması, sonsuza kadar bilinmeden kalacak doğrulukların olduğu anlamına gelmiyor; "mistik" bir sezginin (zihinsel çalışmalarda kullanılandan tür ve itibar açısından kökten farklı) güçlü, ikna edici bir kanıtlamayla yer değiştirmesi anlamına da gelmiyor. Bazı yazarların öne sürdükleri gibi "insan aklının kaçınılamaz sınırları" olduğu anlamına da gelmiyor. Ama, insan zihninin dayanaklarının tümüyle biçimselleştirilmediğine ve biçimselleştirilemeyeceğine, her zaman yeni kanıtlama ilkelerinin icadının ve bulunmasının beklendiği anlamına geliyor. Belli bir aksiyom kümesinden biçimsel çıkarımla ortaya konamayacak matematiksel önermelerin, yine de biçimsel olmayan üst-matematiksel usavurmayla ortaya konabileceğini daha önce görmüştük. Bu biçimsel olarak kanıtlanamayan ve üst-matematiksel uslamlamayla ortaya konan doğrulukların, sezgiye açık çağrıdan daha iyi bir şeye dayanmadıklarını söylemek sorumsuzluk olacaktır.

Ne de, bilgisayarların içsel sınırlılıklarının olması, canlı maddenin ve insan aklının fiziksel ve kimyasal terimlerle açıklanabileceğinden umudu kesme anlamına gelmektedir. Bu tür açıklamaların olanaklılığı Gödel'in "tam olmama" teoremi tarafından ne dışarıda bırakılmıştır, ne de öne sürülmüştür. Bu teorem, insan zihninin yapısının ve gücünün, şimdiye kadar tasarlanmış herhangi bir cansız makineden çok daha karmaşık ve üstün olduğuna işaret etmektedir. Gödel'in kendi yapıtı bu karmaşıklığa ve üstünlüğe verilebilecek olağanüstü bir örnektir. Gödel'in teoremi, umutsuzluğa bir bahane değildir, ama yaratıcı aklın gücünün yeniden değerlendirilmesi için bir fırsattır.

EK NOTLAR

1. (sayfa 7) İtalyan Matematikçi Giuseppe Peano'nun 1899'da yayımlanan çalışmasına kadar, sayal sayılar aritmetiği aksiyomatikleştirilmemişti. Peano'nun aksiyomları beş tanedir. Bilindikleri varsayılan üç tanımlanmamış terim aracılığıyla formüle edilmişlerdir. Bu terimler şunlardır: "sayı", "sıfır" ve "ardılı olma" [bir tamsayının hemen ardından gelen tamsayı]. Peano'nun aksiyomları aşağıdaki gibi ifade edilebilirler:

1. Sıfır bir sayıdır.
2. Bir sayının ilk ardılı da bir sayıdır.
3. Sıfır hiçbir sayının ilk ardılı değildir.
4. Aynı ilk ardıla sahip iki sayı yoktur.
5. Sıfıra ait bir özellik ve bu özelliğe sahip her sayının ilk ardılına ait bir özellik, tüm sayılara da aittir.

Bu sonuncu aksiyom, genellikle "matematiksel tümevarım ilkesi" denilen ilkeyi formüle etmektedir.

2. (sayfa 31) Okur, metnin sağladığı mantıksal teoremlerden ve çıkarım kurallarından daha fazlasıyla ilgilenmek isteyebilir; bunlar en temel matematiksel kanıtlamalarda bile örtük olarak kullanılmışlardır. Önce Eukleides'in kanıtlamasında, satır 3, 4 ve 5'ten başlayarak satır 6'daki sonuca götüren usavurmayı çözümleyeceğiz.

'*p*', '*q*' ve '*r*' harflerini "önerme değişkeni" olarak kullanacağız; çünkü onların yerine önermeler konulabilir. Ayrıca, yer tasarrufu açısından "eğer *p* ise, demek ki *q*'dur" koşullu önermesi yerine '$p \rightarrow q$' koyacağız ve '$\rightarrow$' iminin solunda kalan deyimi "öncül", sağındakini ise "sonuç" olarak adlandıracağız. Benzer biçimde, "*p*'dir veya *q*'dur" yerine '$p \vee q$' yazacağız.

Temel mantıkta aşağıdaki gibi yazılan bir teorem vardır:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)]$$

Bu teoremin zorunlu bir doğruluk formüle ettiği gösterilebilir. Okur, bu tamdeyimin, aşağıdaki uzun önermenin ifade ettiğini daha sıkı bir biçimde formüle ettiğini görecektir:

Eğer (eğer *p* ise, demek ki *q*) ise, demek ki [eğer (eğer *q* ise, demek ki *r*) ise, demek ki (eğer (ya *p* veya *q*) ise, demek ki *r*)'dir]'dir.

Metinde sözü edildiği gibi, mantıkta Önerme Değişkenleri için

Yerine Koyma Kuralı adı verilen bir çıkarım kuralı vardır. Bu kurala göre, bir S_2 önermesi, önerme değişkenlerini içeren bir S_1 önermesinden mantıksal olarak çıkarımlanıyordur, eğer ilk önerme, değişkenlerin yerine her önermenin konmasıyla ikinci önermeden elde ediliyorsa. Eğer bu kuralı sözü edilen teoreme uygularsak, yani '*p*' yerine "*y* bir asal sayıdır", '*q*' yerine "*y* bir bölünebilir sayıdır" ve '*r*' yerine "*x* en büyük asal sayı değildir"i koyarsak şunu elde ederiz:

(*y* bir asal sayıdır → *x* en büyük asal sayı değildir)
→ [(*y* bir bölünebilir sayıdır → *x* en büyük asal sayı değildir)
→ ((*y* bir asal sayıdır ∨ *y* bir bölünebilir sayıdır) → *x* en büyük asal sayı değildir)]

Okur, ilk ayraç içindeki koşullu önermenin (teoremin hemen üstteki yorumunun ilk satırı), Eukleides'in kanıtlamasının üçüncü satırını tekrarladığını görecektir. Benzer biçimde, köşeli ayraç içindeki ilk ayraçta bulunan koşullu önermenin (teoremin hemen üstteki yorumunun ikinci satırı), Eukleides'in kanıtlamasının dördüncü satırını tekrarladığını görecektir. Ayrıca, köşeli ayraç içindeki diğer önerme de kanıtlamanın beşinci satırını tekrar etmektedir.

Şimdi Ayırma Kuralı (veya "Modus Ponens") olarak bilinen diğer bir çıkarım kuralını kullanacağız. Bu kural bize, biri S_1, diğeri $S_1 \rightarrow S_2$ olan iki önermeden S_2 önermesini çıkarımlama olanağını sağlamaktadır. Bu Kuralı üç kez kullanırsak: Önce, Eukleides'in kanıtlamasının üçüncü satırını ve mantıksal teoremin yukarıdaki yorumunu; ikinci olarak, ilk uygulamadan elde edilen sonuçla, Eukleides'in kanıtlamasının dördüncü satırını ve son olarak, ikinci uygulamadan elde edilen sonuçla, Eukleides'in kanıtlamasının beşinci satırını kullanırsak, elde edeceğimiz sonuç kanıtlamanın altıncı satırı olacaktır.

Altıncı satırın, üçüncü, dördüncü ve beşinci satırlardan elde edilmesi, iki çıkarım kuralının ve bir mantık teoreminin gizliden kullanımını içeriyor. Bu teorem ve kurallar, mantıksal kuramın temel bölümüne aittirler, önermeler mantığına. Mantığın bu bölümü, önerme eklemleri (örneğin →, ∨ vb.) yardımıyla önermeler arasındaki mantıksal bağıntıları konu almaktadır. Diğer eklemler arasında "ve", kısaca '.' ile gösterilmektedir; dolayısıyla '*p* ve *q*', '*p* . *q*' olarak yazılır. '~' imi "değil" eklemini temsil etmektedir; dolayısıyla "değil *p*", kısaca '~*p*' olarak yazılır.

Şimdi Eukleides'in kanıtlamasında altıncı satırdan yedinciye geçişe bakalım. Bu basamak yalnızca önermeler mantığı kullanılarak çözümlenemez. Bu iş için mantıksal kuramın

daha ileri bir bölümüne ait bir çıkarım kuralı gerekmektedir; yani önermelerin içsel karışıklığını "tüm", "her biri", "bazıları" gibi deyimleri ve onların eşanlamlarını kullanarak düzenleyen mantık bölümü. Bu deyimlere geleneksel olarak "niceleyiciler" denir ve bunları konu alan mantık kuramı bölümüne, niceleme mantığı denir.

Söz konusu geçiş sorunun çözümlemeye girişmeden önce, mantığın daha ileri bölümlerinde kullanılan bu notasyonu açıklamak gerekiyor. Önermelerin yerine konulan önerme değişkenlerine ek olarak, bireysel adların yerine konabilecek '*x*', '*y*', '*z*' vb. olarak kullanılan "bireysel değişkenler" kategorisini de göz önüne almalıyız. Bu değişkenleri kullanarak, "2'den büyük tüm asal sayılar tek sayıdır" tümel önermesini şöyle yazabiliriz: "Bütün *x*'ler için, eğer *x*, 2'den büyük bir asal sayı ise, *x* tek sayıdır." "Bütün *x*'ler için" deyimine *tümel niceleme* denir ve genelde mantıksal notasyonda '(*x*)' imi ile kısaltılır. Demek ki yukarıdaki tümel önerme şöyle yazılabilir:

(*x*) (*x*, 2'den büyük bir asal sayı ise $\rightarrow$ *x* bir tek sayıdır)

Bundan başka, "Bazı tamsayılar bölünebilirdir" tikel (ya da varoluşsal) önermesi, "En az bir *x* vardır, öyle ki, bu *x* bir tamsayıdır ve bölünebilirdir" önermesine çevrilebilir. "En az bir *x* vardır" deyimine, tikel niceleyici denmektedir ve '($\exists$*x*)' notasyonu ile kısaltılır. Böylece yukarıdaki tikel önerme şöyle yazılabilir:

($\exists$*x*) (*x* bir tamsayıdır · *x* bölünebilirdir)

Şimdi birçok önermede birden çok niceleyicinin örtük olarak kullanıldıkları incelenecek, öyle ki, asıl yapıları ortaya konduğunda birçok niceleyici görünmüş olacak. Bu noktaya girmeden önce, yüklem deyimi olarak adlandırılanlar ya da basitçe yüklem denilenler için yapılan kısaltmalara bakalım. "As (*x*)" deyimini, "*x* bir asal sayıdır" için, "Bk (*x*, *z*)" deyimini de "*x*, *z*'den büyüktür" için kullanacağız. "*x* en büyük asal sayıdır" önermesini göz önüne alalım. Bu önermenin anlamı şu kullanımla daha belirtik kılınabilir: "x bir asal sayıdır ve asal olan ama *x*'ten farklı olan bütün *z*'ler için, *x z*'den büyüktür". Çeşitli kısaltmalar yardımıyla, "*x* en büyük asal sayıdır" önermesi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\text{As}\ (x) \cdot (z)\ [(\text{As}\ (z) \cdot \sim(x = z)) \rightarrow \text{Bk}\ (x, z)]$$

Harfi harfine söyleyecek olursak: "*x* bir asal sayıdır ve bütün *z*'ler için, eğer *z* bir asal sayıysa ve *z x*'e eşit değilse, demek ki *x z*'den büyüktür". Böylece Eukleides'in kanıtlamasındaki birinci satırın içeriğinin, simgesel dizi içindeki biçimsel ve belirtik ifa-

desini vermiş olduk.

Bundan sonra, kanıtlamanın altıncı satırında yer alan "*x* en büyük asal sayı değildir" önermesinin bizim notasyonumuzda nasıl ifade edileceğini göz önüne alalım:

$$\text{As}\ (x) \cdot (\exists z)\ [(\text{As}\ (z) \cdot \text{Bk}\ (z, x)]$$

Harfi harfine söyleyecek olursak: "*x* bir asal sayıdır ve en az bir *z* vardır, öyle ki, *z* bir asal sayıdır ve *z* *x*'ten büyüktür".

Böylece Eukleides'in kanıtlamasının sonucunu, en büyük asal sayının olmadığını öne süren yedinci satırı simgesel dile çevirmiş oluyoruz:

$$(x)\ [\text{As}\ (x) \rightarrow (\exists z)\ (\text{As}\ (z) \cdot \text{Bk}\ (z, x)]$$

Harfi harfine söyleyecek olursak: "Bütün *x*'ler için, eğer *x* bir asal sayıysa, demek ki en az bir *z* vardır, öyle ki, *z* bir asal sayıdır ve *z* *x*'ten büyüktür". Okuyucu Eukleides'in kanıtlamasının sonucunun, birden çok niceleyiciyi örtük olarak içerdiğini gözlemleyecek.

Şimdi Eukleides'in kanıtlamasının altıncı satırından yedinciye geçişi tartışmaya hazırız. Aşağıda yazılan bir mantık teoremidir:

$$(p \cdot q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

Bu teorem "Eğer hem *p* ve hem de *q* ise, demek ki (eğer *p* ise *q*'dur). Yerine Koyma Kuralını kullanarak ve '*p*'nin yerine 'As (*x*)' ve '*q*'nun yerine (∃*z*) [(As (*z*) · Bk (*z*, *x*)] koyarak şunu elde ediyoruz:

$$(\text{As}\ (x) \cdot (\exists z)\ [(\text{As}\ (z) \cdot \text{Bk}\ (z, x)]) \rightarrow$$
$$(\text{As}\ (x) \rightarrow (\exists z)\ (\text{As}\ (z) \cdot \text{Bk}\ (z, x)])$$

Teoremin bu yorumundaki öncül (ilk satır) Eukleides'in kanıtlamasının altıncı satırını tekrarlıyor; ayırma Kuralını uyguladığımızda şunu elde ediyoruz:

$$(\text{As}\ (x) \rightarrow (\exists z)\ (\text{As}\ (z) \cdot \text{Bk}\ (z, x)])$$

Niceleme mantığındaki Çıkarım Kuralına göre, '(*x*) (... *x*...)' biçimine sahip bir S_2 önermesi, her zaman '(... *x*...)' biçimine sahip bir S_1 önermesinden çıkarımlanabilir. Başka bir deyişle, önek olarak '(*x*)' niceleyicisine sahip bir önerme, bu öneki almayan ama bunun dışında diğeriyle aynı biçimde olan önermelerden türetilebilir. Bu kuralı hemen yukarıdaki önermeye uyguladığımızda Eukleides'in kanıtlamasının yedinci satırını elde ediyoruz.

Eukleides teoreminin kanıtlamasından çıkan sonuç, bu işlemler boyunca yalnızca önermeler mantığına ait teoremlerin ve çıkarım kurallarının değil, aynı zamanda niceleme mantığının çıkarım kurallarının da kullanıldığıdır.

3. (sayfa 42) Dikkatli bir okur bu noktaya karşı çıkabilir. Bu karşı çıkışı da aşağıdaki yolu izleyebilir. Totoloji olma özelliği doğruluk ve yanlışlık kavramlarıyla tanımlanıyor. Ancak bu kavramlar, açıkça biçimsel dizgenin *dışında* bir başvuru içeriyorlar. Dolayısıyla metinde sözü edilen yöntem, dizgeye bir model sağlayarak biçimsel dizgenin bir *yorumu* oluyor. Ama böyle olunca da, yazarlar söz verdikleri şeyi yapmamış oluyorlar, yani tamdeyimlerin bir özelliğinin tanımlanmasını, tamdeyimlerin kendilerinin saf yapısal özelliklerine başvurarak yapma işini. Böylelikle, kitabın ikinci bölümünde işaret edilen güçlük -yani modellere dayanan ve aksiyomların tutarlılığını, onların doğruluğuna dayandıran tutarlılık kanıtlamalarının, sorunu başka bir alana kaydırması– sonuçta başarıyla aşılmamış oluyor. Öyleyse bu kanıtlamayı göreli değil de, "mutlak" diye nitelendirmek niye?

Bu karşı çıkma, kitaptaki sunuş biçimine yöneldiğinde haklıdır. Ancak biz, bu biçimi, sezgisel düzeyde anlaşılması çok güç olan bu kanıtı, çok soyut sunuş biçimlerine alışık olmayabilecek okuyucuyu gereğinden fazla bunaltmamak için uygun gördük. Yine de işin aslını görmek isteyen daha cesur okuyucu için, yukarıdaki eleştirileri karşılamak amacıyla bu "latif" olmayan tanımlamayı vereceğiz.

Biçimsel dizgenin bir tamdeyiminin ya önerme değişkeni olarak kullanılan bir harfle (bu tamdeyimlere temel diyeceğiz) ya da bu harflerin önerme eklemleri ve ayraçlar kullanılarak birleştirilmesiyle elde edildiğini biliyoruz. Her temel tamdeyimin, birbirlerini tam dışlayan ve karşılıklı tüketen K_1 ve K_2 gibi iki kümeden birine girdiğini kabul edelim. Temel olmayan tamdeyimler, bu kümelere aşağıdaki uzlaşımlara uygun olarak yerleştirilirler:

i) $S_1 \vee S_2$ biçimine sahip bir tamdeyim, ancak hem S_1 hem de S_2, K_2 kümesine ait ise K_2 kümesine yerleştirileceklerdir; başka durumda K_1 kümesine yerleştirilirler.

ii) $S_1 \rightarrow S_2$ biçimine sahip bir tamdeyim, ancak S_1, K_1'de ve S_2 de K_2'de ise K_2 kümesine yerleştirileceklerdir; başka durumda K_1 kümesine yerleştirilirler.

iii) $S_1 \cdot S_2$ biçimine sahip bir tamdeyim, ancak hem S_1 hem de S_2 K_1 kümesine ait ise K_1 kümesine yerleştirilicekler-dir; başka durumda K_2 kümesine yerleştirilirler.

iv) ~S biçimine sahip bir tamdeyim, ancak S, K_1'de ise K_2 kümesine yerleştirilecektir; başka durumda K_1 kümesine yerleştirilirler.

Böylece totoloji olma özelliğini tanımlamış olduk: Bir tamdeyim, yalnız ve yalnızca temel oluşturucular iki kümeden hangisine girerlerse girsinler, eğer K_1 kümesine giriyorsa bir totolojidir. Artık totoloji olma özelliğinin hiçbir model ve yorum kullanmadan betimlendiği açıktır. Bir tamdeyimin, bir totoloji olup olmadığını, onun yapısını yukarıdaki uzlaşımlara göre sınayarak kararlaştırabiliriz.

Böyle bir inceleme yukarıdaki dört aksiyomun da totoloji olduğunu gösteriyor. Burada uygun yöntem, verilen bir tamdeyimin oluşturucu öğelerini yukarıdaki iki kümeye yerleştirecek tüm olanaklı yolların bir dökümünü yapmaktır. Bu döküm sonucunda, verilen tamdeyimin temel olmayan birleşik tamdeyimlerinin hangi kümeye ait olduğunu ve tüm tamdeyimin hangi kümeye ait olduğunu her durum için görebiliriz. Birinci aksiyomu alalım. Onun çizelgesi üç sütundan oluşmaktadır; her birinin başında aksiyomun kendisi olduğu gibi, onu oluşturan temel ya da temel olmayan tamdeyimler bulunmaktadır. Her başlığın altında tamdeyimlerin ait olduğu kümeler gösterilmiştir. Çizelge aşağıda verilmektedir:

p	$(p \vee p)$	$(p \vee p) \rightarrow p$
K_1	K_1	K_1
K_2	K_2	K_1

İlk sütun, aksiyomun oluşturucu öğelerinden bir tekinin sınıflandırılmasının olanaklı yollarını göstermektedir. İkinci sütunda, *(i)* temel öğelerin uzlaşımına dayanarak bir kümeye yerleştirilmesi gösterilmektedir. Son sütunda ise, *(ii)* aksiyomun kendisinin uzlaşımına dayanarak bir kümeye yerleştirilmesi gösterilmektedir. Son sütun birinci aksiyomun, onun temel oluşturucu öğelerinin hangi kümeye yerleştiğinden bağımsızca K_1 kümesine düştüğünü göstermektedir. Demek ki bu aksiyom bir totolojidir.

İkinci aksiyom için çizelge aşağıdaki gibidir:

p	q	$(p \vee q)$	$p \rightarrow (p \vee q)$
K_1	K_1	K_1	K_1
K_1	K_2	K_1	K_1
K_2	K_1	K_1	K_1
K_2	K_2	K_2	K_1

İlk iki sütun, aksiyomun oluşturucu öğelerinden ikisinin sınıflandırılmasının olanaklı dört yolunu göstermektedir. Üçüncü sütunda, temel olmayan öğenin *(i)* uzlaşımına dayanarak bir kümeye yerleştirilmesi gösterilmektedir. Son sütunda aksiyomun kendisinin *(ii)* uzlaşımına dayanarak bir kümeye yerleştirilmesi gösterilmektedir. Ayrıca son sütun ikinci aksiyomun, onun temel oluşturucu öğelerinin sınıflandırılabileceği dört yol için K_1 kümesine düştüğünü göstermektedir. Demek ki, bu aksiyom bir totolojidir. Diğer iki aksiyomun da totoloji olduğu benzer yoldan gösterilebilir.

Şimdi, totoloji olma özelliğinin Ayırma Kuralı altında kalıtımsal olduğunu göstereceğiz. (Özelliğin Yerine koyma Kuralı altında kalıtımsal olduğunun gösterilmesini okura bırakıyoruz). S_1 ve $S_1 \rightarrow S_2$ biçimine sahip herhangi iki tamdeyimin totoloji olduklarını varsayalım; bu durumda S_2'nin bir totoloji olduğunu göstermemiz gerekiyor. S_2'nin totoloji olmadığını varsayalım. Bu durumda, onun oluşturucu öğelerinin sınıflandırılmasından en az birisi K_2 kümesine düşecektir. Ancak ilk varsayımdan dolayı S_1 totolojidir, dolayısıyla onun oluşturucu öğelerinin tüm sınıflandırılmaları K_1 kümesine düşecektir –ve özellikle S_2'yi K_2'ye yerleştirmek için gereken sınıflandırmada. Buna göre, bu son sınıflandırma için $S_1 \rightarrow S_2$, uzlaşım *(ii)* yüzünden K_2 kümesinin altına düşmek zorundadır. Bununla birlikte, bu $S_1 \rightarrow S_2$'nin bir totoloji olduğu varsayımı ile çelişmektedir. Sonuç olarak S_2 bu çelişkiden de ortaya çıktığı gibi totoloji olmalıdır. Böylece, totoloji olma özelliği, Ayırma Kuralı sayesinde, öncüllerden bu kural kullanılarak türetilen sonuca aktarılmış olmaktadır.

Kitapta verilen totoloji tanımı üzerine son bir açıklama yapalım. Yukarıda kullandığımız açıklamada K_1 ve K_2 kümeleri, sırasıyla doğru ve yanlış önermelerin kümeleri olarak yorumlanabilirler. Ancak yukarıda gördüğümüz gibi, bu açıklama hiçbir biçimde böyle bir yoruma bağlı değildir; her ne kadar kümeler böyle yorumlandıklarında sunuşun anlaşılması çok daha kolay olsa da.

Kısa Kaynakça

Carnap, Rudolf	*Logical Syntax of Language*, New York, 1937.
Findlay, J.	"Goedelian Sentences: A Non-Numerical Approach," *Mind*, c. 51, 1942, s. 259-265.
Gödel, Kurt	"Über Formal Unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und Verwandter Systeme I," *Monatshefte für Mathematik und Physik*, c. 38, 1931, s. 173-198.
Kleene, S. C.	*Introduction to Metamathematics*, New York, 1952.
Ladrière, Jean	*Les Limitations Internes des Formalismes*, Louvain ve Paris, 1957.
Mostowski, A.	*Sentences Undecidable in Formalized Arithmetic*, Amsterdam, 1952.
Quine, W. V. O.	*Methods of Logic*, New York, 1950.
Rosser, J. Barkley	"An Informal Exposition of Proofs of Gödel's Theorems and Church's Theorem," *Journal of Symbolic Logic*, c. 4, 1939, s. 53-60.
Turing, A. M.	"Computing Machinery and Intelligence," *Mind*, c. 59, 1950, s. 433-460.
Weyl, Hermann	*Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton, 1949.
Wilder, R. L.	*Introduction to the Foundations of Mathematics*, New York, 1952.

Dizin



'Gerçek' matematikçilerin uğraştığı 'gerçek' matematiğin neredeyse tamamen yararsız olduğu söylense de saf matematikle uğraşan Gottlob Frege, Georg Cantor ve Richard Dedekind herhangi bir yararlı makine icat etmemişler ama Batıda yeni bir düşünme tarzının temellerini atan bir araç sağlamışlardır.

Çağlar boyunca matematiğin kesinlik, tutarlılık, tamlık gibi ideal beklentileri eksiksizce karşılayan bir bilim olduğu düşünüldü. Kesinlik, tutarlılık, tamlık gibi niteliklerin matematiğe yüklenmesinin en önemli nedeni, matematiğin aksiyomlardan türetilen doğru önermelerinin, yani teoremlerin kesin olarak kanıtlanabilir olmasıydı. Matematiğin teoremlerinin doğru iseler, doğrulukları kesinlikle kanıtlanabilen, doğru değilseler de, yine doğru olmadıkları kesin olarak kanıtlanabilen önermeler oldukları, dolayısıyla matematikte kesinlik ve tutarlılığın tam olarak egemen olduğu kabul edilmişti.

Gödel'in kanıtlaması bu kabullerin ve beklentilerin doğru olmadığını yine matematikten yola çıkarak kesin olarak göstermiştir. Whitehead ve Russell'ın matematiğin mantıksal temelleri konusundaki dev çalışması olan *Principia Mathematica*'yı ele alarak temellerin hep eksik kalacağını göstermiştir. Yani doğal sayılar aritmetiğini kapsayan bir biçimsel dizgede öyle önermeler vardır ki, bunların ne doğru ne de yanlış oldukları kanıtlanabilir. Ayrıca Gödel, doğal sayılar aritmetiğini kapsayan bir biçimsel dizgenin tutarlılığının, bu dizgenin kendi içinde kanıtlanamayacağını da kanıtlamıştır. Gödel kanıtlamasının sonuçları matematiğin kendi içsel sınırlılıkları olduğunu ortaya koymuştur.

Gödel kanıtlaması mantık ve matematiğin dışına taşan felsefi sonuçlara da sahiptir. Matematiğin ve matematiksel nesnelerin aslî doğası, matematikle mantığın ilişkisi, vb. felsefi meseleleri yeni bir tartışma zeminine taşımıştır. Ayrıca postmodernite üzerine düşünce üreten felsefeciler de Gödel'e sık sık gönderme yapmakta ve bütünselci yaklaşımlara yöneltilen eleştirilerde Gödel'in çalışmalarından da destek bulduklarını düşünmekteler.

Kurt Gödel (28 Nisan 1906 - 14 Ocak 1978)

Mantıkçı, matematikçi ve matematik felsefecisidir. Kendi ismiyle anılan 'Gödel'in Eksiklik Teoremleri' ile tanınır. Ünlü teoremlerini Viyana Üniversitesindeki doktora çalışması sırasında 1931 yılında ispatlamış, bununla 20. yüzyıl matematiğinin yönünü değiştirmiştir. 1940'larda Princeton Üniversitesi İleri Araştırmalar Enstitüsünde, Einstein'ın kütle çekimi alanı denklemlerine, ekseni etrafında dönen bir evreni tanımlayan bir çözüm getirdi. Gödel'in modeli, zamanda geriye gitmenin görelilik kuramınca yasaklanmadığını ortaya koydu. İçine kapanık bir kişiliği olan Gödel, son yıllarında zehirleneceği paranoyasına kapılarak hiçbir şey yememeye başlamış, bunun sonucunda beslenme eksikliğinden 14 Ocak 1978'de Princeton'da ölmüştür.






ISBN 978-975-6193-70-9

BOĞAZİÇİ ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ